Die Berechnung der Gittertemperatur von Empfängerröhren

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde

genehmigt

von der Philosophischen Fakultät der
Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin

Von

Siegfried Wagener

aus Hamburg

Tag der mündlichen Prüfung 9. Mai 1935
Tag der Promotion 20. Juni 1935

172

Referenten: Prof. Dr. Wehnelt
Prof. Dr. Schumann

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Vorwort

Von den verschiedenen Fehlern, welche die modernen Empfängerröhren aufweisen können, ist der in der Röhrentechnik als "thermische Gitteremission" bezeichnete einer der störendsten. Er äussert sich in dem Auftreten eines sog. umgekehrten Gitterstromes, d.h. eines Stromes, der im äusseren Kreis vom negativ vorgespannten Gitter zur Kathode fliesst, der also die umgekehrte Richtung wie der gewöhnliche Gitterstrom besitzt, welcher bei zu geringer negativer Gitterspannung beobachtet wird.

Ein Strom in dieser umgekehrten Richtung kann allerdings auch dann fliessen, wenn infolge Ionisierung irgendwelcher in der Röhre vorhandener Restgase positive Ionen auf das Gitter gelangen, oder wenn infolge fehlerhafter Isolation ein Isolationsstrom zwischen Gitter und Kathode auftritt. Von diesen beiden Strömen kann jedoch der bei der thermischen Gitteremission vorhandene Strom deutlich unterschieden werden. Die thermische Gitteremission wird nämlich im Gegensatz zum Ionenstrom auch an Röhren mit sehr gutem Vakuum beobachtet, und zwar auch dann, wenn die Gitterspannung verhältnismässig niedrig gewählt und wenn das Fliessen des normalen von der Kathode ausgesandten Elektronenstromes dadurch verhindert wird, dass alle übrigen Elektroden spannungslos gegen die Kathode gemacht werden. Ferner zeigt die thermische Gitteremission schon bei recht niedrigen Gitterspannungen (etwa 20 Volt) Sättigung, während der infolge fehlerhafter Isolation fliessende Strom mit wachsender Gitterspannung immer grösser wird.

Aus alledem folgt, dass bei der thermischen Gitteremission Elektronen vom Steuergitter ausgesandt und zur Kathode beschleunigt werden. Diese Elektronenemission muss, wie auch der für sie gewählte Name besagt, thermischer Natur sein, da ihre Grösse in ausserordentlich starkem Masse von der Temperatur der Kathode und damit von der Temperatur des Steuergitters abhängt.

Aus der schädlichen Wirkung, die jeder Gitterstrom ausübt, ergibt sich, dass eine Röhre mit thermischer Gitteremission für die Verwendung im Empfänger ungeeignet ist. Der wesentlichste Fehler, der durch das Fliessen eines jeden Gitterstromes verursacht wird, ist, unabhängig von der Richtung, die dieser Strom besitzt, die Herabsetzung des wirksamen Gitterwiderstandes auf einen dem Verhältnis von Gitterspannung zu Gitterstrom entsprechenden Wert. Hierdurch wird beim Vorhandensein eines Schwingungskreises zwischen Gitter und Kathode dessen Dämpfung erhöht und die Trennschärfe des Empfängers entsprechend verringert. Ein weiterer Fehler kann dadurch hervorgerufen werden, dass die Gitterwechselspannung verzerrt und damit die Tonwiedergabe des Empfängers verschlechtert wird. Nun ist die Forderung nach möglichst grosser Trennschärfe eine der Hauptforderungen, die wegen der grossen Senderdichte an einen modernen Empfänger gestellt werden muss, und es wird daher vom Empfängerbau durch die Anfertigung verlustarmer Kondensatoren und dämpfungsarmer Spulen grosse Mühe darauf verwandt, die Forderung zu erfüllen. Man wird infolgedessen verstehen, dass eine Röhre, deren Gitterwiderstand herabgesetzt ist, im modernen Empfänger nicht mehr verwendet werden kann und dass daher das Auftreten eines Fehlers, der so ausserordentlich störende Folgen nach sich zieht, auf jeden Fall verhindert werden muss.

Auf Grund der oben angegebenen Zusammenhänge ist es ohne weiteres einzusehen, worauf das Auftreten der thermischen Gitteremission zurückzuführen ist. Das Steuergitter muss bekanntlich hierzu eine merklich erhöhte Temperatur besitzen. Diese Temperaturerhöhung reicht indessen zur alleinigen Erklärung noch nicht aus, da die als Gitterwerkstoff verwendeten Metalle merkliche Elektronenmengen erst bei viel höheren Temperaturen aussenden, als sie in Empfängerröhren im gewöhnlichen Betrieb jemals erreicht werden. Infolgedessen muss zur Erklärung der thermischen Gitteremission ausserdem noch angenommen werden, dass auf dem Steuergitter aus irgendeiner Ursache eine Schicht von so geringer Elektronenaustrittsarbeit vorhanden ist, dass schon bei verhältnismässig niedriger Temperatur Elektronen in grösserer Zahl ausgesandt werden können.

In der Tat zeigt die Erfahrung, dass die thermische Gitteremission nur an Röhren mit mittelbar geheizter Oxydkathode beobachtet wird. Bei diesen bewirkt die auf der Pumpe und beim Formieren erforderliche Glühbehandlung der Kathode, dass eine gewisse Menge des Kathodenwerkstoffes verdampft, sich zu einem Teil auf dem Steuergitter niederschlägt und dadurch die Elektronenaustrittsarbeit des Steuergitters verkleinert. Ein ähnlicher Vorgang wird natürlich auch bei den batteriegeheizten Oxykathodenröhren vorhanden sein, bei ihnen ist indessen die von der Kathode ausgestrahlte Heizleistung so gering, dass das Gitter nicht die für die thermische Gitteremission erforderliche Temperatur erreicht. Erst durch die mit der Einführung der mittelbar geheizten Röhren verbundene Vergrösserung der Heizleistung wurde die Gittertemperatur so weit erhöht, dass die thermische Gitteremission auftreten konnte.

Solange wie in der Hauptsache nur Eingitterröhren hergestellt wurden, bei denen das Steuergitter einen verhältnismässig grossen Abstand von der Kathode besass, konnte das Auftreten der thermischen Gitteremission in ziemlich einfacher Weise verhindert werden. Bei diesen Röhren genügte es, dass die von der Anode reflektierte Kathodenstrahlung durch eine gazeförmige Ausbildung der Anode verringert wurde. Hierdurch wurde die Temperatur des Steuergitters, die wegen des grossen Abstandes des Steuergitters von der Kathode schon an und für sich niedrig war, so weit gesenkt, dass praktisch keine thermische Gitteremission mehr auftrat. Je mehr Gitter man jedoch in dem Zwischenraum zwischen Steuergitter und Anode anbrachte und je näher man gleichzeitig zur Erhöhung der Steilheit das Steuergitter an die Kathode heranrückte, um so weniger reichten die bisher getroffenen Massnahmen zur Verhinderung der thermischen Gitteremission aus. Eine systematische Erforschung der für die Verhinderung der thermischen Gitteremission vorhandenen Möglichkeiten erschien daher angebracht.

Prinzipiell sind, entsprechend den beiden Ursachen der thermischen Gitteremission, zwei Möglichkeiten für ihre Beseitigung vorhanden; die eine besteht in einer Erhöhung der Austrittsarbeit, die andere in einer Herabsetzung der Temperatur des Steuergitters. In der vorliegenden Arbeit soll die zweite Möglichkeit untersucht werden.

Diese Untersuchung kann wegen der vielen Veränderlichen, von denen die Temperatur des Steuergitters abhängt, auf experimentellem Wege schwer durchgeführt werden. Es wird daher in der vorliegenden Arbeit der Versuch gemacht, die Gittertemperatur mit Hilfe eines neuen Verfahrens, das auch zur Behandlung ähnlicher Proble-

me des Strahlungsüberganges verwendet werden kann, zu berechnen. Die verschiedenen, die Gittertemperatur bestimmenden Einflüsse werden bei diesem Verfahren berücksichtigt. Es sind dies ausser der von der Kathode ausgestrahlten Energie bzw. der sie bestimmenden Kathodentemperatur, die von den übrigen Elektroden auf das Steuergitter zurückgestrahlten Energiemengen und insbesondere auch die Wärmeableitung durch die Streben des Gitters. Die Anzahl der in der Röhre insgesamt vorhandenen Elektroden ist bei dem entwickelten Verfahren keiner Beschränkung unterworfen.

Damit die mit Hilfe dieses Verfahrens erzielte Genauigkeit beurteilt werden kann, soll bereits an dieser Stelle darauf hingewiesen werden, dass bei einem an gebräuchlichen Empfängerröhren durchgeführten Vergleich der rechnerisch ermittelten Temperaturen mit experimentell gefundenen Werten eine Abweichung von etwa 5% gefunden wurde. Mittels des neuen Verfahrens können daher die Gittertemperaturen der gebräuchlichen Röhren mit für die Praxis ausreichender Genauigkeit berechnet werden.

Die Beschreibung des benutzten Verfahrens ist in drei Teile gegliedert. Im ersten Teil werden die allgemeinen Grundlagen gegeben, auf welche Weise beim Vorhandensein von im Vakuum befindlichen strahlenden Körpern die Temperaturen dieser Körper berechnet werden können. Im zweiten Teil wird die Übertragung dieses allgemeinen Lösungsverfahrens auf eine Elektronenröhre mit n Elektroden beschrieben, während im dritten Teil der schon erwähnte Vergleich der Rechnung mit dem Experiment durchgeführt wird.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41544312_0061

Inhaltsverzeichnis

Seite

A) Das allgemeine Problem

§ 1 Die Aufgabe 1

§ 2 Die Energiebilanz 1

§ 3 Die Ordnungsprinzipien zur Berechnung der gesamten auf den i-ten Körper auffallenden Strahlungsenergie A_i 3

§ 4 Die bisher vorgenommenen Versuche zur Lösung der Aufgabe 4

§ 5 Die Schwierigkeiten einer Ausdehnung der bisher vorgenommenen Lösungsversuche auf das allgemeine Problem 5

§ 6 Der Grundgedanke des neuen Verfahrens 6

§ 7 Die Berechnung der Koeffizienten e_{ik} 8

§ 8 Die Symmetriebeziehung 12

§ 9 Der Zusammenhang zwischen den Koeffizienten r_{ik} und e_{ik} 14

§ 10 Die Aufstellung des Grundgleichungssystems 17

§ 11 Die Ermittlung der gesuchten Körpertemperaturen T_i .. 18

§ 12 Die Anwendungsmöglichkeiten des neuen Verfahrens ... 19

B) Die Ermittlung der Elektrodentemperaturen einer n-Elektrodenröhre

§ 13 Die Problemstellung und die Voraussetzungen 19

§ 14 Die Untersuchung der Anwendbarkeit des Verfahrens ... 21

§ 15 Die Einteilung der Koeffizienten in drei Klassen 26

§ 16 Das Grundgleichungssystem 27

§ 17 Die Grundgedanken der Koeffizientenberechnung 29

§ 18 Die Berechnung der Koeffizienten der ersten und zweiten Klasse für unendlich lange Elektroden 33

§ 19 Die Berechnung der Koeffizienten der dritten Klasse für unendlich lange Elektroden 35

§ 20 Die Erweiterung der Koeffizientenberechnung auf Elektroden endlicher Länge 39

§ 21 Die Wärmeleitungsgleichung für die Gitter 46

§ 22 Die Ermittlung der einem Gitter insgesamt zugeführten Energie 50

§ 23 Die Integration der Wärmeleitungsgleichung 57

§ 24 Die Ermittlung der genauen Werte der Gittertemperatur 68

Seite

§ 25 Zusammenfassung des abgeleiteten Rechenverfahrens und Angabe von Formeln für bestimmte Röhrenarten 69

C) Die experimentelle Prüfung der Voraussetzungen des Verfahrens

§ 26 Die Grundlagen der experimentellen Prüfung 82
§ 27 Die Messung der Anodentemperatur an einer Zweielektrodenröhre 86
§ 28 Die Temperatur des idealisierten Gitters 89
§ 29 Die Gleichheit von Windungs- und Strebentemperatur ... 92
§ 30 Die Gittertemperatur unter Berücksichtigung der Wärmeableitung nach aussen 94
§ 31 Die Temperatur des realen Gitters 111

Anhang

Beispiel für die Berechnung einer Gittertemperatur 121
Zusammenstellung der bei der Rechnung benutzten Formeln 135
Zusammenstellung der Bezeichnungen 138
Zusammenfassung 141

A) Das allgemeine Problem

§ 1 Die Aufgabe

Es sei ein System von n im Vakuum befindlichen KörpernI, II ....N gegeben. Jedem von ihnen werde in der Zeiteinheit die Energiemenge W_i (i = 1....n) von ausserhalb des Systems liegenden Energiequellen (z. B. durch elektrische Heizung) zugeführt. Ein Energieaustausch zwischen den Körpern soll allein durch Strahlung erfolgen können, d.h. es soll keine wärmeleitende Verbindung zwischen ihnen bestehen.

Der Energiezufuhr von aussen steht dann eine Energieverlust gegenüber, der sich aus zwei Teilen zusammensetzt. Erstens trifft nämlich ein Teil der von den Körpern ausgesandten Strahlung nicht wieder auf Körper des Systems auf und geht so dem System als Ganzem verloren, und zweitens wird jedem einzelnen Körper durch Wärmeableitung nach aussen Energie entzogen. Unter dem Einfluss der Energiezufuhr und des Energieverlustes wird sich nach hinreichend langer Zeit ein Gleichgewichtszustand einstellen, in welchem jeder der Körper eine gewisse Temperatur T_i besitzt. Diese Temperaturen T_i der n Körper sind zu ermitteln.

Als bekannt soll für jeden der Körper das für ihn gültige Strahlungsgesetz vorausgesetzt werden, durch welches die in der Zeiteinheit von dem betreffenden Körper ausgestrahlte Energie E_i mit der Temperatur T_i verbunden wird. Danach ist :

$$E_i = O_i \cdot \varphi_i(T_i) \qquad (1)$$

wobei O_i die Oberfläche des i-ten Körpers und φ_i eine beliebige jedoch bekannte Funktion ist. Ferner ist die Kenntnis des Absorptionsvermögens a_i bzw. Reflektionsvermögens ρ_i und der Wärmeleitfähigkeit λ_i für jeden der n-Körper erforderlich.

§2 Die Energiebilanz

Mit Hilfe der Gleichung (1) lässt sich die gestellte Aufgabe auf eine reine Energiebetrachtung zurückführen, da aus (1) bei bekannter ausgestrahlter Energie E_i die Temperatur T_i des i-ten Körpers berechnet werden kann. Die Aufgabe ist also gelöst, wenn es gelingt , die Energien E_i sämtlicher n-Körper zu ermitteln. Dazu wird der Energiesatz benutzt, nach welchem für jeden einzelnen der n-Körper die in der Zeiteinheit aufgenommene Energie gleich der in der Zeiteinheit abgegebenen ist.

Wir betrachten zunächst die aufgenommene Energie. Diese setzt sich für einen beliebig herausgegriffenen i-ten Körper des Systems aus zwei Hauptbestandteilen zusammen; erstens wird nämlich nach den oben angegebenen Voraussetzungen dem Körper I in der Zeiteinheit die Energie W_i von aussen zugeführt, und zweitens wird ihm von den Körpern des Systems ein gewisser Energiebetrag zugestrahlt, von dem der durch das Absorptionsvermögen a_i bestimmte Bruchteil absorbiert wird.

Die dem Körper **I** zugestrahlte Energie kann im allgemeinen von allen n-Körpern des Systems herrühren. Sie enthält sowohl Strahlungsanteile, welche dem i-ten Körper von den ausstrahlenden Körpern unmittelbar, d.h. ohne Reflextionen, zugestrahlt werden, als auch solche Energiemengen, welche den i-ten Körper erst erreichen, nachdem sie eine mehr oder weniger grosse Anzahl von Reflextionen an den Körpern des Systems erfahren haben. Die gesamte den i-ten Körper in der Zeiteinheit treffende Strahlungsenergie soll mit A_i bezeichnet werden, ohne Rücksicht auf ihren Ursprungsort und den innerhalb des Systems zurückgelegten Weg. Diese Energie A_i ist offenbar abhängig von der Ausstrahlung E_i sämtlicher Körper des Systems; sie kann also aufgefasst werden als Funktion

$$A_i\ (E_1, E_2 \ldots\ldots E_n)$$

der Veränderlichen E_1, E_2, ... E_n. Ausserdem wird sie abhängen von dem bekannten Reflextionsvermögen $\rho_i = (1 - a_i)$ der n-Körper und schliesslich von deren geometrischer Anordnung. Da diese zuletzt genannten beiden Einflüsse aber als Konstanten in die Funktion A_i (E_1, E_2, ... E_n) eingehen, brauchen sie nicht besonders aufgeführt zu werden.

Die Zusammenfassung der beiden Bestandteile ergibt die gesamte vom i-ten Körper aufgenommene Energie zu:

$$W_i + a_i\ A_i\ (E_1, E_2 \ldots\ldots E_n).$$

Wir betrachten weiterhin die vom i-ten Körper abgegebene Energie. Diese besteht ebenfalls aus zwei Teilen; der eine ist die in der Zeiteinheit ausgestrahlte Energie E_i, der andere ist die in der Zeiteinheit nach aussen abgeleitete Wärmemenge, die mit Q_i bezeichnet werden soll. Damit ergibt sich sie gesamte abgegebene Energie zu:

$$E_i + Q_i$$

Werden die beiden so gefundenen Ausdrücke für die aufgenommene und die abgegebene Energie in den Energiesatz eingeführt, so ergibt sich die Energiebilanz, welche die Gleichheit von ausgenommener und abgegebener Energie zum Ausdruck bringt zu:

$$W_i + a_i\ A_i\ (E_1, E_2 \ldots\ldots E_n) = E_i + Q_i \qquad (2)$$

Hierin ist das Glied Q_i, welches die abgeleitete Wärme darstellt, von der Körpertemperatur T_i abhängig, und es werden infolgedessen die Körpertemperaturen wieder in die aufzustellenden Gleichungen hineinkommen. Damit die dadurch verursachte Belastung der Darstellung vermieden und der Gedankengang des Lösungsverfahrens möglichst klar wiedergegeben wird, soll zunächst die Wärmeableitung als vernachlässigbar klein angenommen werden. Am Schluss der Schilderung des Lösungsverfahrens wird dann angegeben werden wie auch eine nicht zu vernachlässigende Wärmeleitung berücksichtigt werden kann.

Sieht man also vorläufig von dem Energieverlust durch Wärmeleitung ab, so ergibt sich, wegen $Q_i = 0$, die Energiebilanz in der vereinfachten Form:

$$E_i = W_i + a_i A_i (E_1, E_2 \ldots\ldots E_n) \qquad (3)$$

Da diese Gleichung für einen beliebig herausgegriffenen Körper abgeleitet ist, gilt sie für alle n Körper, und man erhält für i = 1 .... n ein System von n Gleichungen für die n Unbekannten $E_1, E_2 \ldots\ldots E_n$. Aus diesem Gleichungssystem sind also die E_i zu berechnen. Damit das möglich ist, muss der Zusammenhang zwischen den auftreffenden Energien A_i und den Unbekannten E_i bestimmt, d.h. es müssen die Funktionen $A_i (E_1 \ldots\ldots E_n)$ ermittelt werden.

§ 3 Die Ordnungsprinzipien zur Berechnung der gesamten auf den i-ten Körper auffallenden Strahlungsenergie A_i.

Die Ermittlung der gesuchten Beziehung zwischen den zugestrahlten und den ausgestrahlten Energien A_i bzw. E_i stösst nun im allgemeinen auf grosse Schwierigkeiten. In der Energie A_i sind nämlich, wie bei ihrer Einführung erwähnt wurde, Strahlungsanteile enthalten, die sich sowohl in bezug auf den Ursprungsort, wie in bezug auf den Weg, welchen sie innerhalb des Systems zurückgelegt haben, sehr stark von einander unterscheiden, so dass die Zusammensetzung von A_i aus den einzelnen Bestandteilen ausserordentlich unübersichtlich ist. Um weiter zu kommen, muss man daher eine gewisse Übersicht schaffen und zu diesem Zwecke die einzelnen Strahlungsbestandteile nach gewissen Prinzipien ordnen.

Die beiden naheliegendsten Ordnungsprinzipien sind nach den bisherigen Ausführungen die Einteilung der auftreffenden Strahlung einerseits nach ihrem Entstehungsort, und andererseits nach dem Weg, welchen sie vor dem Auftreffen zurückgelegt haben. Im ersten Falle unterscheidet man zwischen den Strahlungsanteilen, welche von dem ersten, dem zweiten usw. bis zum n-ten Körper ausgestrahlt werden, und sieht davon ab, ob die Strahlung den i-ten Körper unmittelbar oder erst nach einer Reihe von Reflextionen erreicht. Im zweiten Falle ordnet man die Strahlungsanteile nach der Anzahl der Reflextionen, welche sie auf dem Wege von dem ausstrahlenden zum auffangenden Körper erleiden, und lässt den Entstehungsort der Strahlung unberücksichtigt.

Es ist ohne weiteres klar, dass zur Lösung der Aufgabe stets beide Ordnungsprinzipien herangezogen werden müssen. Sehr wesentlich ist es jedoch, wie die folgenden Ausführungen zeigen werden, welches der beiden Prinzipien man als Ausgangspunkt für die Zuordnung benutzt und damit gewissermassen zum Hauptordnungsprinzip macht.

In der Wahl dieses Hauptordnungsprinzips unterscheidet sich das Verfahren, welches bisher zur Lösung derartiger Wärmeübergangsprobleme angewandt wurde, von dem neuen Verfahren, über das nachher berichtet werden wird. Es wird sich zeigen, dass nach dem alten Verfahren Aufgaben, bei welchen ein Strahlungsübergang zwischen mehr als zwei Körpern stattfindet, nur unter sehr vereinfachenden Annahmen gelöst werden können. Dadurch ist natürlich der Anwendungsbereich dieses Verfahrens sehr stark einegeschränkt. Bei dem neuen Verfahren ist es dagegen nicht nötig, diese vereinfachenden Annahmen einzuführen, so dass die erzielten Ergebnisse auch bei beliebig vielen Körpern exakte Gültigkeit beanspruchen können. Damit die Überlegenheit des neuen Verfahrens gegenüber dem alten beurteilt werden kann, soll zunächst das bisher angewandte Verfahren kurz beschrieben werden.

§ 4 Die bisher vorgenommenen Versuche zur Lösung der Aufgabe [1]

Zur Schilderung der bisher vorgenommenen Versuche zur Lösung der allgemeinen Aufgabe werde zunächst der einfachste Fall betrachtet, dass nur zwei Körper vorhanden sind. Jeder von ihnen wird dann eine gewisse Energiemenge ausstrahlen, welche von dem anderen Körper zum Teil absorbiert, zum Teil reflektiert wird. Die reflektierte Strahlung fällt auf den ausstrahlenden Körper zurück, der sie wieder teils absorbiert, teils reflektiert und so fort.

Als Hauptordnungsprinzip wird nun bei dem bisher benutzten Verfahren die Einteilung der auf jeden Körper auftreffenden Strahlung nach ihrem Ursprungsort verwendet. Betrachtet man also in dem Fall, dass zwei Körper vorhanden sind, zunächst einen von beiden, so zerfällt die auffallende Strahlung für diesen ersten Körper in zwei Teile. Der eine von ihnen besteht aus der Strahlung, welche der zweite Körper dem ersten sowohl unmittelbar als auch nach einer Reihe von Reflexionen am ersten und zweiten Körper zusendet. Der zweite Bestandteil rührt von der Strahlung des ersten Körpers her, welche nach einer mehr oder weniger grossen Anzahl von Reflexionen an beiden Körpern wiederum auf den ersten Körper zurückgelangt.

Jede dieser beiden Teilenergien wird nun weiter zerlegt nach dem Weg, welchen die Strahlung in dem System der beiden Körper zurückgelegt hat. Es ist also zu ermitteln, wie gross die Energiebeträge sind, welche nach einem Hin- und Hergang, nach zwei, drei und schliesslich nach beliebig vielen Hin- und Hergängen auf den betrachteten ersten Körper auftreffen. Diese Zerlegung muss vorgenommen werden einerseits für die Strahlung des zweiten Körpers auf den ersten und andererseits für die Strahlung des ersten auf sich selbst.

Die zu ermittelnden Energiebeträge bilden offenbar die Glieder einer unendlichen Reihe, und zwar werden durch die geschildert Einteilung für jeden der beiden Körper zwei solche Reihen erhalten; der Summenwert der ersten Reihe ergibt die gesamte Strahlung eines Körpers auf den anderen, der Summenwert der zweiten die Strahlung eines Körpers auf sich selbst.

Die unendlichen Reihen werden geometrisch, wenn es sich um besonders einfache Anordnungen, wie zwei paralelle Platten, zwei konzentrische Kugeln oder dergl. handelt, weil dann bei jedem Hin und Hergang der gleiche Bruchteil der auftreffenden Energie absorbiert bzw. reflektiert wird. In solchen Fällen lassen sich also die Summenwerte der unendlichen Reihen explizit angeben und daher leicht berechnen.

Bei diesen einfachen Körperanordnungen ist mit der auf diese Weise durchgeführten Ermittlung der auf die beiden Körper auftreffenden Energien A_1 und A_2 die Aufgabe schon gelöst. Es ergibt sich nämlich ein System von zwei linearen Gleichungen für die beiden Ausstrahlungen E_1 und E_2. Aus den dadurch bestimmten Werten von E_1 und E_2 werden nach Gleichung (1) die Temperaturen T_1 und T_2 der beiden Körper ohne weiteres gefunden.

---

1) vergl. die Lehrbücher: ten Bosch, "Die Wärmeübertragung", Bln. 19
und Gröber, Erk, "Die Grundgesetze der Wärmeübertragung", Bln. 19

§ 5 Die Schwierigkeiten einer Ausdehnung der bisher vorgenommenen Lösungsversuche auf das allgemeine Problem

Während also das alte Verfahren bei den genannten einfachen Körperanordnungen ohne weiteres durchzuführen ist, wird die Berechnung der auftreffenden Energien A_1 bzw. A_2 selbst bei nur zwei Körpern schon sehr unbequem, sobald die Körperanordnung weniger symmetrisch ist. In diesem Fall ist nämlich die Verteilung der auftreffenden Strahlung auf der Oberfläche der Körper nicht mehr bei jeder Reflexion die gleiche. Infolgedessen wird nicht mehr immer der gleiche Bruchteil der Strahlung reflektiert, sondern die Grösse dieses Bruchteils wird abhängig von der Ordnung der Reflexion. Die unendlichen Reihen sind daher nicht mehr geometrisch, so dass ihre Summenwerte nicht mehr explizit angegeben werden können, sondern aus einer genügenden Anzahl von Reihengliedern ermittelt werden müssen. Die Anzahl dieser Glieder muss um so grösser sein, je mangelhafter die Reihe konvergiert. Offenbar ist dieser Konvergenz um so schlechter, je weniger Energie bei einem einzelnen Hin- und Hergang von der Strahlung absorbiert wird, je grösser also das Reflexionsvermögen der betreffenden Körper ist. Da nun in den praktisch am häufigsten vorkommenden Fällen die Strahlung sehr langweilig ist und das Reflexionsvermögen z.B. der Metalle für eine solche Strahlung sehr hohe Werte (0,8 - 0,9) besitzt, so wird man zur Berechnung der Summenwerte eine grosse Anzahl von Reihengliedern berücksichtigen müssen. Da jedes dieser Reihenglieder einzeln berechnet werden muss, so ist also eine erhebliche Rechenarbeit zu leisten.

Noch viel ungünstiger liegen die Verhältnisse bei dem alten Verfahren, wenn das System nicht aus zwei, sondern aus drei oder noch mehr Körpern besteht. Als neue Schwierigkeit kommt dann bei der Berechnung der auf den i-ten Körper auftreffenden Strahlungsenergie hinzu, dass dabei auch derjenige Strahlungsanteil zu berücksichtigen ist, der den i-ten Körper erst auf Umwegen erreicht, der also nach dem Verlassen des ausstrahlenden Körpers erst ein- oder mehrmals an den übrigen Körpern des Systems reflektiert wird, ehe er den i-ten Körper trifft.

Die bei der Berücksichtigung dieses Anteils sich ergebenden ausserordentlich verwickelten Verhältnisse bilden die Ursache dafür, dass eine allgemeine Lösung des Problems bisher nicht angegeben worden ist. Die bisherigen Anwendungen des geschilderten Verfahrens beschränken sich daher fast stets auf die erwähnten einfachen Anordnungen von zwei Körpern. Nur in einem Fall ist ein System von mehr als zwei Körpern untersucht worden 2), jedoch ist dabei die einschränkende Annahme gemacht worden, dass die Reflexion der Körper vernachlässigt werden kann, wodurch natürlich die geschilderten Schwierigkeiten fortfallen. Diese Voraussetzung fehlender Reflexion mag in einzelnen Sonderfällen vielleicht zutreffend erscheinen, im allgemeinen wird sie jedoch aus den angegebenen Gründen zu fehlerhaften Ergebnissen führen müssen.

Nach dieser kurzen Schilderung des alten Verfahrens soll im folgenden über das neue Verfahren berichtet werden, bei welchem keine derartigen, die Allgemeingültigkeit der erhaltenen Ergebnisse stark einschränkenden Voraussetzungen angenommen werden müssen.

---

2) O. Seibert, die Wärmeaufnahme der bestrahlten Kesselheizfläche. Dissertation Darmstadt 1929.

§ 6 Der Grundgedanke des neuen Verfahrens

Die Schwierigkeiten, die sich dem soeben geschilderten alten Verfahren entgegenstellen, beruhen vor allem darauf, dass dabei das Schicksal der von den einzelnen Körpern ausgesandten Energiemengen auf ihrem sehr unübersichtlichen Wege durch das System verfolgt werden muss. Das ist bei dem neuen Verfahren nicht notwendig. Dieser Vorteil wird dadurch erzielt, das ein anderes Hauptordnungsprinzip an den Anfang der Betrachtung gestellt wird. Es wird sich zeigen, dass dadurch die erwähnte Reihenbildung vermieden werden kann, so dass eine allgemeine Lösung des Problems auch für beliebig viele Körper erhalten wird.

Es werde wiederum die gesamte auf einen beliebigen i-ten Körper auftreffende Strahlungsmenge A_i betrachtet. Dann soll diese Strahlungsmenge in erster Linie nicht mehr nach ihrem Entstehungsort, sondern nach dem Wege, den sie im System zurückgelegt hat, unterteilt werden. Es soll also von vornherein unterschieden werden zwischen der Strahlung, welche den i-ten Körper unmittelbar, d.h. ohne dass sie Reflexionen erlitten hat, erreicht, und zwischen der Strahlung, welche diesen Körper erst nach einer mehr oder weniger grossen Anzahl von Reflexionen trifft. Erst die beiden sich so ergebenden Teilstrahlungen sollen dann weiterhin nach ihrem Entstehungsort geordnet werden.

Von diesen beiden Teilstrahlungen betrachten wir zunächst die auf den i-ten Körper unmittelbar auftreffende Strahlung. Damit diese Strahlung dem Entstehungsort in einfacher Weise zugeordnet werden kann, werde aus dem System noch ein weiterer beliebiger Körper K herausgegriffen. Der Bruchteil der gesamten Eigenstrahlung E_k dieses k-ten Körpers, welcher den i-ten unmittelbar trifft, werde mit $e_{ik} \cdot E_k$ bezeichnet. (Die Stellung der beiden Indizes von e_{ik} soll von vornherein so festgelegt werden, dass immer der erste den absorbierenden, der zweite den emittierenden Körper bezeichnet.) Die Werte e_{ik} lassen sich, wie später gezeigt werden wird, aus den Strahlungsgesetzen und aus der geometrischen Anordnung der Körper berechnen. Die gesamte, unmittelbar den i-ten Körper treffende Strahlung ergibt sich dann durch Summation über alle Werte von k zu

$$\sum_{k=1}^{n} e_{ik} E_k$$

Nachdem so der erste Teil der auffallenden Strahlung A_i bestimmt worden ist, muss weiterhin die Strahlung ermittelt werden, welche den i-ten Körper erst trifft, nachdem sie eine mehr oder weniger grosse Anzahl von Reflexionen an den übrigen Körpern des Systems erlitten hat. Wollte man diese reflektierte Strahlung ebenfalls denjenigen Körpern zuordnen, von denen sie ursprünglich ausgestrahlt worden ist, so würden wiederum die bereits bei dem alten Verfahren geschilderten unüberwindlichen Schwierigkeiten auftreten. Um diese zu vermeiden, soll daher die reflektierte Strahlung demjenigen Körper zugeordnet werden, an welchem sie zuletzt vor ihrem Auftreten auf den i-ten Körper reflektiert worden ist. Es soll also darauf verzichtet werden, festzustellen, welchem Körper die reflektierte Strahlung ihren Ursprung zu verdanken hat.

Damit die Einteilung der reflektierten Strahlung nach diesem Gesichtspunkt durchgeführt werden kann, werde wiederum ein weiterer

beliebiger Körper K aus dem System herausgegriffen und die gesamte in der Zeiteinheit von ihm reflektierte Energie mit $E_k^{(r)}$ bezeichnet. Diese Energie $E_k^{(r)}$ ist natürlich ebenso wenig bekannt, wie die Eigenstrahlung E_k des k-ten Körpers und muss daher als Hilfsunbekannte eingeführt werden. In ihr sind, worauf besonders hingewiesen sei, Strahlungsbestandteile enthalten, die von sämtlichen Körpern des Systems herrühren und die alle möglichen Wege innerhalb des Systems zurückgelegt haben können. Der Bruchteil dieser vom k-ten Körper insgesamt reflektierten Energie $E_k^{(r)}$, welcher den i-ten Körper unmittelbar trifft, soll mit $r_{ik} \cdot E_k^{(r)}$ bezeichnet werden. Die gesamte den i-ten Körper treffende reflektierte Energie ergibt sich dann, in gleicher Weise wie vorhin bei der direkten Strahlung, durch Summation über alle Werte von k zu:

$$\sum_{k=1}^{n} r_{ik} \, E_k^{(r)}$$

Damit ist auch für den zweiten Bestandteil der den i-ten Körper treffenden Strahlung A_i ein einfacher Ausdruck gewonnen worden. Die Summe der beiden Bestandteile liefert die gesamte Strahlung A_i in der Form:

$$A_i \, (E_1, E_2 \ldots\ldots E_n) = \sum_{k=1}^{n} (e_{ik} \, E_k + r_{ik} \, E_k^{(r)}) \qquad (4)$$

Die zugestrahlte Energie A_i wird also eine lineare Funktion der ausgestrahlten Energien E_k und der reflektierten Energien $E_k^{(r)}$. Die als Hilfsunbekannte eingeführten reflektierten Energien enthalten, entsprechend ihrer Definition, implizit die Summenwerte der unendlichen Reihen, welche bei dem alten Verfahren auftreten und berechnet werden müssen. Diese Berechnung braucht bei dem neuen Verfahren nicht durchgeführt zu werden, weil die Hilfsunbekannten $E_k^{(r)}$, wie gezeigt werden wird, bei der Lösung der Aufgabe wieder herausfallen. In der durch das andere Hauptordnungsprinzip des neuen Verfahrens gegebenen Möglichkeit, die reflektierten Energien als Hilfsunbekannte einzuführen und so ihre Berechnung zu vermeiden, ist die grosse Überlegenheit des neuen Verfahrens gegenüber dem alten zu suchen.

Die Einführung des aus (4) erhaltenen Wertes für A_i in die Energiebilanz (3) ergibt die für das neue Verfahren geltende Beziehung:

$$E_i = W_i + a_i \sum_{k=1}^{n} (e_{ik} \, E_k + r_{ik} \, E_k^{r}) \qquad (5)$$

die als Grundgleichung des neuen Verfahrens angesehen werden kann. Die darin vorkommenden Koeffizienten e_{ik} und r_{ik} sollen kurz als Koeffizienten dieser Grundgleichung bezeichnet werden.

Während die Koeffizienten e_{ik} sich aus der geometrischen Anordnung der Körper berechnen lassen, können die r_{ik} auf diese Weise nicht ermittelt werden, wenn nicht die Entstehung der reflek-

tierten Strahlung im einzelnen untersucht wird. Da dies aber, wegen der dabei auftretenden Schwierigkeiten, gerade vermieden werden soll, so muss versucht werden, einen Zusammenhang zwischen den beiden Koeffizienarten herzustellen und dadurch die Berechnung der r_{ik} auf die der e_{ik} zurückzuführen. Es wird gezeigt werden, dass das unter einer einschränkenden Bedingung möglich ist. Bevor jedoch darauf eingegangen wird, soll zunächst gezeigt werden, wie die Koeffizienten e_{ik} zu berechnen sind.

§ 7 Die Berechnung der Koeffizienten e_{ik}.

Die Koeffizienten e_{ik} waren definiert als das Verhältnis derjenigen vom k-ten Körper (K) ausgesandten Strahlung $e_{ik} \cdot E_k$, die den i-ten Körper (I) unmittelbar trifft, zur insgesamt vom k-ten Körper ausgesandten Strahlung E_k. Zur Berechnung dieses Verhältnisses muss zunächst die Ausstrahlung eines Flächenelementes $d\sigma$ des Körpers K berechnet werden. Daraus wird sich dann durch passende Integrationen sowohl die gesamte von K ausgestrahlte Energie E_k, wie auch der Teil $e_{ik} \cdot E_k$ dieser Energie ermitteln lassen, welcher direkt den Körper I erreicht.

In $d\sigma$ befinde sich der Mittelpunkt eines rechtwinkligen, rechtshändigen Koordinatensystems, dessen X-Achse die Normale von $d\sigma$ ist. (vergl. Abb. 2). Die vom Element $d\sigma$ in der Zeiteinheit in den Raumwinkel

$$d\omega = \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$$

ausgestrahlte Energie ergibt sich dann aus dem Lambertschen Kosinusgesetz zu:

$$dE_{d\sigma} = S_k \cdot d\sigma \cdot \cos(x, r) \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \quad ^{3)} \qquad (6)$$

Hierin ist S_k die spezifische "Strahlungsintensität", die von der Temperatur des betreffenden Körpers abhängt. Damit das Ergebnis der Rechnung möglichst allgemein gültig ist, sollen auch Temperaturunterschiede an der Oberfläche der Körper zugelassen werden. S_k wird daher eine Funktion der Koordinaten auf der Körperoberfläche. Diese Koordinaten, die ganz beliebig, krummlinig oder rechtwinklig gewählt werden können, seien mit p und q bezeichnet.

Für die späteren Rechnungen ist es zweckmässig, den Winkel (x, r) in (6) durch die beiden Winkel ϑ und φ auszudrücken. Das wird ermöglicht durch die zwischen diesen Winkeln im rechtwinkligen sphärischen Dreieck ABC der Abb. 1, bestehende Beziehung:

$$\cos(x, r) = \cos(90 - \vartheta) \cdot \cos\varphi = \sin\vartheta \cdot \cos\varphi$$

(vergl. Abb. 1a, in der das Dreieck ABC gesondert gezeichnet worden ist). Setzt man den so für cos (x, r) gefundenen Wert in (6) ein und berücksichtigt ferner, dass $d\sigma = dp \cdot dq$ ist, so wird:

$$dE_{d\sigma} = S_k(p, q) \cdot \cos\varphi \sin^2\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \, dp \, dq \qquad (7$$

3) vergl. z.B. Planck, Einführung i. d. theoret. Phys. Bd. V, S.146

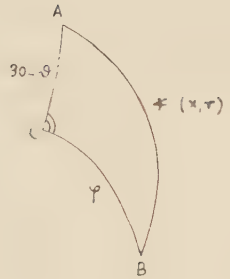


Abb 1a

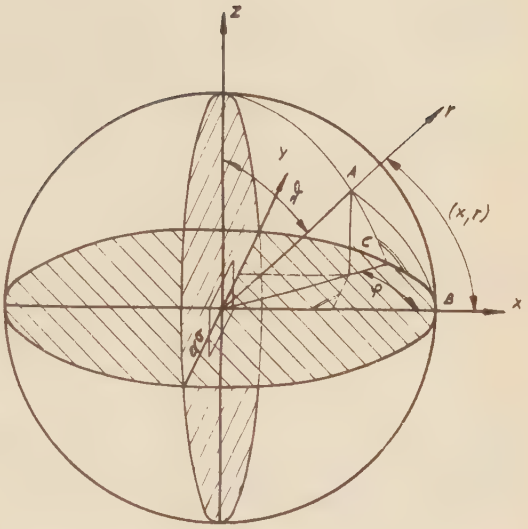


Abb. 1

Aus dieser Strahlung eines Flächenelementes $d\sigma$ des Körpers K ergibt sich einmal die Gesamtstrahlung des Körpers K durch eine vierfache Integration. Zunächst wird nämlich durch Integration über ϑ von 0 bis π und über φ von $-\frac{\pi}{2}$ bis $\frac{\pi}{2}$ die Strahlung des Flächenelementes $d\sigma$ in den gesamten Halbraum erhalten. Weiter wird daraus durch Integration über p und q, wobei alle der Körperoberfläche zugehörigen Werte durchlaufen werden müssen, die Strahlung der gesamten Oberfläche von K gefunden. Liegt also z.B. die Körperoberfläche im Intervall (p_1, p_2), (q_1, q_2), so wird die gesamte von K ausgestrahlte Energie:

$$E_k = \pi \cdot \int_{p_1}^{p_2} \int_{q_1}^{q_2} S_k(p,q)\, dp\, dq = \pi\, O_k \cdot S_k(p^*, q^*) \qquad (8)$$

wo O_K die Oberfläche des Körpers K und (p^*, q^*) nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung einen Punkt dieser Oberfläche darstellt.

In ähnlicher Weise ergibt sich zweitens der Teil der Strahlung von K, welcher I trifft, ebenfalls durch Integration von (7). dabei ist aber die Integration über ϑ und φ nicht wie vorher über den gesamten Halbraum, sondern nur über solche Werte von ϑ und φ zu erstrecken, für welche der zugehörige Fahrstrahl r die Oberfläche des Körpers I trifft, ohne auf seinem Wege einen der übrigen Körper zu schneiden. Im einfachsten Fall liegt der Integrationsbereich über ϑ und φ zwischen je zwei Grenzwinkeln:

$$\vartheta_1 = \vartheta_1(\varphi, p, q) \qquad \vartheta_2 = \vartheta_2(\varphi, p, q)$$
$$\varphi_1 = \varphi_1(p, q) \qquad \varphi_2 = \varphi_2(p, q)$$

Bei weniger einfachen Anordnungen kann es natürlich auch vorkommen, dass der Fahrstrahl nicht nur in einem Winkelbereich den Körper I trifft, sondern, dass mehrere solcher Bereiche auftreten, so dass also auch die Integration in mehrere Teilbereiche zerfällt. Diese Teilbereiche sind jedoch alle in der gleichen Weise gebildet und lassen sich daher auch alle in der gleichen Weise umformen, so dass es also genügt, die weitere Betrachtung auf den Fall eines einzigen Integrationsbereiches zu beschränken.

Die Integration der Gleichung (7) liefert zunächst die vom Flächenelement $d\sigma$ dem Körper I zugestrahlte Energie als Funktion von p und q:

$$e_{i d\sigma} \cdot E_{d\sigma} = S_k(p,q)\, dp\, dq \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\nu_1}^{\nu_2} \cos\varphi \cdot \sin^2\nu \, d\nu \, d\varphi$$

Im folgenden soll nun zur Abkürzung

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\nu_1}^{\nu_2} \cos\varphi \sin^2\nu \, d\nu \, d\varphi = U_{ik}(p,q) \qquad (9)$$

gesetzt werden. U_{ik} soll als "Wärmeübertragungsfunktion" vom Körper K zum Körper I bezeichnet werden, da diese Funktion mit S_k . multipliziert die von dem Flächenelement $d\sigma$ auf den Körper I direkt übertragene Wärmemenge darstellt. Damit wird also

$$e_{i d\sigma} \cdot E_{d\sigma} = S_k(p,q) \cdot U_{ik}(p,q)\, dp\, dq$$

Die Energie, welche insgesamt von dem Körper I direkt dem Körper K zugestrahlt wird, ergibt sich daraus durch Integration über p und q zu:

$$e_{ik} \cdot E_k = \int_{p_1}^{p_2} \int_{q_1}^{q_2} S_k(p,q)\, U_{ik}(p,q)\, dp\, dq \qquad (10)$$

Aus dieser Gleichung erhält man den gesuchten Koeffizienten e_{ik}, in dem man sie durch den aus (8) sich ergebenden Wert von E_k dividiert. In der so gewonnenen Beziehung ist allerdings die Funktion S_k (p, q) enthalten, die von der Temperaturverteilung an der Oberfläche des betrachteten Körpers abhängig ist. Da nun die Körpertemperatur zu ermitteln ist, so wird die Verteilung der Temperatur auf der Oberfläche und damit die Funktion S_k (p, q) im allgemeinen unbekannt sein. Es erscheint daher zweckmässig, die rechte Seite der Gleichung (10) so umzuformen, dass ein von der Temperaturverteilung unabhängiges Glied abgespalten wird und dass die Glieder, welche die unbekannte Temperaturverteilung enthalten, in einem Restglied zusammengefasst werden. Zu diesem Zweck wird die Gleichung zweimal partiell integriert. Man erhält dann nach einigen Umformungen, die der Kürze wegen nicht im einzelnen behandelt werden sollen, die Beziehung:

$$e_{ik} \cdot E_k = S_k(p^*,q^*) \cdot \int_{p_1}^{p_2} \int_{q_1}^{q_2} U_{ik}(p,q)\, dp\, dq + \Gamma_{ik} \qquad (11)$$

Mit Γ_{ik} ist dabei das Restintegral

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{ik} = &-\int_{p_1}^{p^*}\left\{\int_{q_1}^{q^*}\left[\frac{\partial S_k(p,q)}{\partial p\,\partial q}\cdot\int_{p_1}^{p}\int_{q_1}^{q} U_{ik}(\alpha,\beta)\,d\alpha\,d\beta\right]dq - \int_{q_2}^{q^*}\left[\frac{\partial S_k(p,q)}{\partial p\,\partial q}\cdot\int_{p_1}^{p}\int_{q_2}^{q} U_{ik}(\alpha,\beta)\,d\alpha\,d\beta\right]dq\right\}dp \\
&-\int_{p_2}^{p^*}\left\{\int_{q_1}^{q^*}\left[\frac{\partial S_k(p,q)}{\partial p\,\partial q}\cdot\int_{p_2}^{p}\int_{q_1}^{q} U_{ik}(\alpha,\beta)\,d\alpha\,d\beta\right]dq - \int_{q_2}^{q^*}\left[\frac{\partial S_k(p,q)}{\partial p\,\partial q}\cdot\int_{p_2}^{p}\int_{q_2}^{q} U_{ik}(\alpha,\beta)\,d\alpha\,d\beta\right]dq\right\}dp \\
&-\int_{p_1}^{p^*}\left[\frac{\partial S_k(p,q^*)}{\partial p}\cdot\int_{p_1}^{p}\int_{q_1}^{q_2} U_{ik}(\alpha,\beta)\,d\alpha\,d\beta\right]dp + \int_{p_2}^{p^*}\left[\frac{\partial S_k(p,\bar{q})}{\partial p}\cdot\int_{p_2}^{p}\int_{q_1}^{q_2} U_{ik}(\alpha,\beta)\,d\alpha\,d\beta\right]dp \\
&-\int_{q_1}^{q^*}\left[\frac{\partial S_k(p^*,q)}{\partial q}\cdot\int_{p_1}^{p}\int_{q_1}^{q} U_{ik}(\alpha,\beta)\,d\alpha\,d\beta\right]dq + \int_{q_2}^{q^*}\left[\frac{\partial S_k(p^*,q)}{\partial q}\cdot\int_{p_1}^{p}\int_{q_2}^{q} U_{ik}(\alpha,\beta)\,d\alpha\,d\beta\right]dq
\end{aligned}
\qquad (11a)
$$

bezeichnet worden.

Die Division der Gleichung (11) durch den aus (8) sich ergebenden Wert von E_k liefert schliesslich den gesuchten Koeffizienten e_{ik} in der Form:

$$e_{ik} = \frac{1}{\pi O_k}\cdot\int_{p_1}^{p_2}\int_{q_1}^{q_2} U_{ik}(p,q)\,dp\,dq + \frac{\Gamma_{ik}}{\pi O_k\, S_k(p^*,q^*)}$$

Hierin ist der erste Summand von der Temperatur des Körpers vollkommen unabhängig. Dagegen enthält das im zweiten Summanden auftretende Restintegral Γ_{ik} die Ableitungen der Funktion S_k (p, q), die, wie erwähnt, von der unbekannten Temperaturverteilung an der Oberfläche des k-ten Körpers abhängt. Infolgedessen ist eine zahlenmässige Berechnung der Koeffizienten e_{ik} nur dann möglich, wenn das Restintegral Γ_{ik} verschwindet oder vernachlässigt werden kann.

Es ist leicht zu übersehen, unter welcher Voraussetzung dieses der Fall ist. Die in Γ_{ik} vorkommende spezifische Strahlungsintensität S_k wächst gemäss dem Gesamtstrahlungsgesetz mit einer Potenz der Temperatur, die gleich der vierten oder grösser als diese ist. Infolgedessen werden schon bei nicht sehr grossen Temperaturunterschieden längs der Körperoberfläche die Ableitungen der Funktion S_k (p, q) verhältnismässig grosse Werte annehmen. Das Restintegral Γ_{ik} wird deshalb nur dann vernachlässigt werden dürfen, wenn die Temperaturunterschiede auf der Oberfläche des betreffenden Körpers gering sind. Diese für die Berechenbarkeit der Koeffizienten e_{ik} notwendige Bedingung soll als Temperaturbedingung bezeichnet werden. Beim Erfülltsein dieser Bedingung ist also:

$$e_{ik} = \frac{1}{\pi O_k}\int_{p_1}^{p_2}\int_{q_1}^{q_2} U_{ik}(p,q)\,dp\,dq \qquad (12)$$

Die Frage, ob die Temperaturbedingung erfüllt ist, muss in jedem Sonderfall untersucht werden.

§ 8 Die Symmetriebeziehung

Bevor auf die Ermittlung des Koeffizienten r_{ik} eingegangen wird, soll vorher noch eine für die e_{ik} geltende Symmetriebeziehung abgeleitet werden, welche die zahlenmässige Bestimmung dieser Koeffizienten erheblich erleichtert. Diese Symmetriebeziehung verbindet die e_{ik} in sehr einfacher Weise mit den e_{ki}, so dass durch sie die Anzahl der zu berechnenden Koeffizienten auf die Hälfte verringert wird.

Zur Ableitung dieser Beziehung muss man von der durch (6) gegebenen Strahlung eines Flächenelementes $d\sigma$ des Körpers K in den Raumwinkel $d\omega$ ausgehen. Der Raumwinkel $d\omega$ schneide aus der Oberfläche des bestrahlten Körpers I das Flächenelement $d\tau$ heraus. Dann ergibt sich aus dem Lambertschen Kosinusgesetz in einer dafür am besten geeigneten Schreibweise die Strahlung von $d\sigma$ auf $d\tau$ zu:

$$dE_{d\sigma} = \frac{S_k}{r^2} \cdot \cos(\nu_k, r) \cdot \cos(\nu_i, r)\, d\sigma\, d\tau \quad ^{4)}$$

wenn mit ν_k bzw. ν_i die Normalen auf die Flächenelemente $d\sigma$ bzw. $d\tau$ bezeichnet werden. Dieser Ausdruck, dividiert durch die gesamte vom Flächenelement ausgestrahlte Energie

$$E_{d\sigma} = \pi S_k\, d\sigma$$

ergibt gemäss der Definition der Koeffizienten e den Wert von $e_{d\tau\, d\sigma}$ und zwar wird:

$$e_{d\tau\, d\sigma} = \frac{dE_{d\sigma}}{E_{d\sigma}} = \frac{1}{\pi r^2} \cos(\nu_k, r) \cos(\nu_i, r)\, d\tau \qquad (13a)$$

Diese Gleichung soll nun mit derjenigen verglichen werden, die erhalten wird, wenn umgekehrt wie vorher das Flächenelement $d\tau$ auf das Flächenelement $d\sigma$ strahlt. Dazu sind in (13a) einfach $d\sigma$ und $d\tau$ zu vertauschen, und man erhält also für den Koeffizienten $e_{d\sigma\, d\tau}$ den Wert:

$$e_{d\sigma\, d\tau} = \frac{1}{\pi r^2} \cdot \cos(\nu_i, r) \cos(\nu_k, r)\, d\sigma \qquad (13b)$$

Der Vergleich der beiden Gleichungen (13a) und (13b) zeigt, dass einfach

$$d\sigma \cdot e_{d\tau\, d\sigma} = d\tau \cdot e_{d\sigma\, d\tau} \qquad (14)$$

sein muss.

---

4) vergl. z.B. Planck, Einf. i. d. theoret. Phys. Bd. V, S. 146

Damit hieraus die für die e_{ik} geltende Beziehung abgeleitet werden kann, muss jetzt nur noch gezeigt werden, dass die e_{ik} sich aus den $e_{d\tau\, d\sigma}$ berechnen lassen. Das ist möglich, wenn die Temperaturen auf der Oberfläche der beiden Körper und damit auch die zugehörigen Funktionen S konstant sind. Es ergibt sich nämlich die Strahlung, welche das Flächenelement $d\sigma$ dem ganzen Körper I zustrahlt, aus $e_{d\tau\, d\sigma}$ durch Integration über alle bestrahlten Flächenelemente.

Wird dabei für alle diejenigen Flächenelemente $d\sigma$ und $d\tau$, welche einander nicht bestrahlen können, $e_{d\tau\, d\sigma}$ definitionsgemäss gleich Null gesetzt, so kann die Integration auch über die gesamte Oberfläche von I erstreckt werden. Man erhält dann für das Verhältnis der Strahlung, welche von $d\sigma$ auf den Körper I gestrahlt wird, zur Gesamtstrahlung von $d\sigma$ den Wert:

$$e_{i\, d\sigma} = \int_{O_i} e_{d\tau\, d\sigma}$$

Das gesuchte e_{ik} ergibt sich hieraus schliesslich durch Mittelbildung über die gesamte Oberfläche von K zu:

$$e_{ik} = \frac{1}{O_k} \int_{O_k} \int_{O_i} e_{d\tau\, d\sigma}\, d\sigma \qquad (15a)$$

Dabei sei nochmals darauf hingewiesen, dass diese Mittelbildung nur zulässig ist, wenn alle $d\sigma$ gleich stark strahlen, d.h. S_k also konstant ist.

In derselben Weise ergibt sich bei Vertauschung von K und I der Koeffizient e_{ki} zu:

$$e_{ki} = \frac{1}{O_i} \int_{O_i} \int_{O_k} e_{d\sigma\, d\tau}\, d\tau \qquad (15b)$$

Aus den beiden letzten Gleichungen lässt sich nun die gesuchte Symmetriebeziehung zwischen den Koeffizienten e_{ik} und e_{ki} herleiten. Wird nämlich in (15b) die Reihenfolge der Integrationen vertauscht, so ergibt sich bei Berücksichtigung von (14):

$$e_{ki} = \frac{1}{O_i} \int_{O_k} \int_{O_i} e_{d\tau\, d\sigma}\, d\sigma$$

Also muss, wie der Vergleich mit (15a) zeigt.

$$O_k \cdot e_{ik} = O_i \cdot e_{ki} \qquad (16)$$

sein. Das ist die gesuchte Symmetriebeziehung, durch welche die Berechnung der Koeffizienten ausserordentlich erleichtert wird.

Die hier benutzten Koeffizienten e_{ik} treten auch bei dem Lösungsversuch von Seibert auf, und von diesem ist bereits auf eine derartige Symmetriebeziehung - allerdings ohne allgemeingültigen Beweis - hingewiesen worden. Die Koeffizienten werden von ihm als "Einstrahlzahlen" bezeichnet.

§ 9 Der Zusammenhang zwischen den Koeffizienten r_{ik} und e_{ik}.

Nachdem in den vorhergehenden Paragraphen gezeigt worden ist wie sich die Koeffizienten e_{ik} der Grundgleichung berechnen lassen soll nun gezeigt werden, wie die noch fehlenden Koeffizienten r_{ik} ermittelt werden können. Nachdem dies geschehen ist, wird es möglich sein, aus den Grundgleichungen die unbekannten Körpertemperaturen zu berechnen. Die Koeffizienten r_{ik} sind definiert als das Verhältnis derjenigen am k-ten Körper reflektierten Strahlung $r_{ik} \cdot E_k^{(r)}$, die den i-ten Körper unmittelbar trifft, zur insgesamt am k-ten Körper reflektierten Strahlung $E_k^{(r)}$. Die r_{ik} besitzen also für die am Körper K reflektierte Strahlung dieselbe Bedeutung wie die e_{ik} für die direkte Strahlung des k-ten Körpers.

Es wurde bereits darauf hingewiesen (vergl. § 6), dass es falsch wäre, zur Berechnung der r_{ik} auf die verwickelte Entstehung der reflektierten Strahlung einzugehen, sondern dass man versuchen muss, ohne Rücksicht auf diese Entstehung einen Zusammenhang zwischen dem r_{ik} und e_{ik} herzustellen. Es wird sich zeigen, dass dies in der Tat möglich ist, wenn noch eine einschränkende Annahme gemacht wird, die sich auf den Temperaturgradienten längs der Körperoberfläche bezieht.

Zur Ermittlung des Zusammenhanges zwischen den r_{ik} und den e_{ik} muss die Reflexion als diffus angenommen werden, weil bei spiegelnder Reflexion eine allgemeine Lösung der Aufgabe unmöglich ist. Diese Annahme ist aber keine Besonderheit des neuen Verfahrens, sie ist vielmehr auch bei dem schon erwähnten alten Verfahren notwendig, soweit bei diesem die Reflexion nicht überhaupt vernachlässigt wird. Andererseits bedeutet diese Annahme in den allermeisten Fällen nur eine sehr geringe Beschränkung der Allgemeingültigkeit, weil bei allen den Aufgaben, bei welchen die Körper sich in glühendem Zustand befinden, wie insbesondere bei den später zu behandelnden Elektronenröhren, die auftreffende Strahlung sehr wahrscheinlich diffus reflektiert wird.

Unter dieser Voraussetzung gehorcht die Reflexion dem Lambert'schen Kosinusgesetz, und es können alle die Betrachtungen, die bei der Berechnung der e_{ik} zu der Gleichung (8) für die Gesamtausstrahlung E_k führten, ohne weiteres auf den vorliegenden Fall übertragen werden. Die gesamte vom k-ten Körper reflektierte Energie $E_k^{(r)}$ ergibt sich dann zu:

$$E_k^{(r)} = \pi \iint R_k(p,q)\, dp\, dq \qquad (17)$$

wobei die Funktion R_k (p, q) an Stelle der bei der direkten Strahlung auftretenden Funktion S_k (p, q) eingeführt worden ist. R_k (p, q) stellt also die durch $\pi \cdot d\sigma$ dividierte Reflexion $E_{d\sigma}^{(r)}$ eines Flächenelementes $d\sigma$ in den gesamten Halbraum dar.

Die Übereinstimmung der Gleichungen (8) und (17) zeigt, dass ein Zusammenhang zwischen E_k und $E_k^{(r)}$ und damit der gesuchte Zusammenhang zwischen den e_{ik} und r_{ik} gefunden werden kann, wenn es gelingt, die Funktion R_k (p, q) mit der Funktion S_k (p, q) zu ver-

knüpfen. Da nun die durch R_k (p, q) dargestellte reflektierte Strahlung sich ohne weiteres aus der zugestrahlten Energie ergibt (durch Multiplikation mit ϱ_k), so muss man, um eine solche Verknüpfung zu erhalten, versuchen, auch zwischen der durch S_k (p, q) dargestellten direkten Strahlung und der zugestrahlten Energie eine Beziehung herzustellen. Dies gelingt, indem für ein an der Oberfläche des Körpers K liegendes Volumenelement die Energiebilanz aufgestellt wird. Danach muss, weil ja ein Gleichgewichtszustand aufgestellt worden ist, die diesem Volumenelement in der Zeiteinheit zugeführte Energie gleich der in der Zeiteinheit von ihm abgegebenen Energie sein.

Das - zylindrisch gedachte - Volumenelement besitze die Grundfläche $d\sigma$ und die Höhe dh (dh klein gegen den Durchmesser von $d\sigma$, vergl. Abb.2). Die zugeführte Energie besteht dann aus dem absorbierten Bruchteil der auf das Oberflächenelement $d\sigma$ auftreffenden Strahlungsmenge $A_{d\sigma}$, sie ist also gleich $a_k \cdot A_{d\sigma}$. Die abgegebene Energie setzt sich aus zwei Bestandteilen zusammen, und zwar aus der vom Flächenelement ausgestrahlten Energie $E_{d\sigma}$ und aus der in das Innere des Körpers abgeleiteten Wärmemenge, die gleich $-\lambda \frac{\partial T}{\partial \nu} \cdot d\sigma$ zu setzen ist (ν die nach innen gerichtete Normale von $d\sigma$). Die Energiebilanz für das betrachtete Volumenelement lautet also.

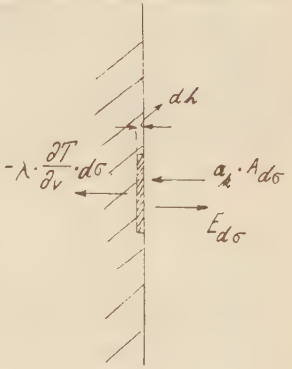


Abb 2

$$a_k \cdot A_{d\sigma} = E_{d\sigma} - \lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial \nu} \cdot d\sigma$$

Die Beziehung zwischen der direkt ausgestrahlten Energie $E_{d\sigma}$ und der zugestrahlten Energie $A_{d\sigma}$ ist damit gewonnen. Weiterhin ergibt sich die von $d\sigma$ reflektierte Energie zu:

$$E_{d\sigma}^{(r)} = (1 - a_k) \cdot A_{d\sigma} = \varrho_k \cdot A_{d\sigma}$$

Wird aus den beiden letzten Gleichungen die zugestrahlte Energie $A_{d\sigma}$ eliminiert und werden dann für $E_{d\sigma}$ bzw. $E_{d\sigma}^{(r)}$ die Funktionen S_k(p, q) bzw. R_k (p, q) eingesetzt so wird:

$$R_k(p,q) = \frac{\varrho_k}{a_k} \left[S_k(p,q) - \frac{\lambda}{\pi} \cdot \frac{\partial T}{\partial \nu} \right] \qquad (18)$$

Damit ist auch der Zusammenhang zwischen R_k (p, q) und S_k (p, q) gefunden. (Der Fall a = 0 kann unberücksichtigt bleiben, da dass Absorptionsvermögen Null praktisch nicht vorkommt.)

Mit Hilfe von (18) kann nun auch die gesuchte Beziehung zwischen e_{ik} und r_{ik} aufgestellt werden. Dabei muss ausgegangen werden von der Gleichung (17), welche die gesamte am Körper K reflektierte Energie angibt. Wird darin der Wert für R_k (p, q) aus (18) eingesetzt, so ergibt sich:

$$E_k^{(r)} = \pi O_k \cdot \frac{\varrho_k}{a_k} \left[S_k(p^*,q^*) - \frac{\lambda}{\pi} \left(\frac{\partial T}{\partial \nu} \right)_{p',q'} \right] \qquad (19)$$

wenn (p', q') einen nicht näher zu bestimmenden Punkt auf der Oberfläche von K bedeutet.

Die Gesamtenergie $E_k^{(r)}$, multipliziert mit dem Koeffizienten r_{ik}, ergibt denjenigen Teil der vom Körper K reflektierten Energie, welcher den Körper I trifft. Dieser Teil wird in genau der gleichen Weise gefunden wie der Bruchteil $e_{ik} \cdot E_k$ bei der Berechnung der Koeffizienten e_{ik}. Entsprechend Gleichung (10) wird also:

$$r_{ik} E_k^{(r)} = \frac{\varrho_k}{a_k} \int_{p_1}^{p_2} \int_{q_1}^{q_2} \left[S_k(p,q) - \frac{\lambda}{\pi} \cdot \frac{\partial T}{\partial \nu} \right] U_{ik}(p,q)\, dp\, dq$$

worin U (p, q) die schon erwähnte Wärmeübertragungsfunktion ist.

In der so gewonnenen Beziehung sind die beiden unbekannten Funktionen S (p, q) und $\frac{\partial T}{\partial \nu}$ enthalten. Man wird daher, ähnlich wie in der Gleichung (10) bei der Berechnung der Koeffizienten e_{ik}, zunächst versuchen, ein von den beiden Funktionen unabhängiges Glied abzuspalten. Das gelingt wiederum durch eine partielle Integration. und zwar wird:

$$r_{ik} \cdot E_k^{(r)} = \frac{\varrho_k}{a_k} \cdot \left[S_k(p',q') - \frac{\lambda}{\pi} \left(\frac{\partial T}{\partial \nu} \right)_{p',q'} \right] \cdot \int_{p_1}^{p_2} \int_{q_1}^{q_2} U_{ik}(p,q)\, dp\, dq + \frac{\varrho_k}{a_k} \cdot (\Gamma_{ik} - \Gamma_{ik}^{(r)})$$

Hierin ist Γ_{ik} das bereits bei der Berechnung der e_{ik} auftretende Restintegral, während man $\Gamma_{ik}^{(r)}$ aus Γ_{ik} dadurch erhält, dass man die Funktion S (p, q) durch die Funktion $\frac{\lambda}{\pi} \frac{\partial T}{\partial \nu}$ und die Stelle (p', q') durch die Stelle (p', q') ersetzt.

Aus Gleichung (20) findet man, indem man durch den aus (19) sich ergebenden Wert $E_k^{(r)}$ dividiert, den Koeffizienten r_{ik}. Berücksichtigt man schliesslich noch Gleichung (12), so ist die gesuchte Beziehung zwischen den r_{ik} und den e_{ik} gefunden, und zwar wird:

$$r_{ik} = e_{ik} + \frac{\Gamma_{ik} - \Gamma_{ik}^{(r)}}{\pi \varrho_k \cdot \left[S_k(p',q') - \frac{\lambda}{\pi} \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial \nu} \right)_{p',q'} \right]} \qquad (21)$$

Das Restintegral $\Gamma_{ik}^{(r)}$ enthält die Ableitungen der Normalkomponente des Temperaturgradienten längs der Oberfläche des Körpers K, die sich aus der unbekannten Temperaturverteilung im Körper K ergeben. Damit r_{ik} aus Gleichung (21) berechnet werden kann, muss also neben Γ_{ik} auch $\Gamma_{ik}^{(r)}$ verschwinden oder zu vernachlässigen sein. Das ist sicher der Fall, wenn gefordert wird, dass die Normalkomponente des Temperaturgradienten sich längs der Oberfläche nur wenig ändert. Unter dieser Bedingung, die im folgenden als Gradientenbedingung bezeichnet werden soll, erhält man also aus (21) die einfache Beziehung:

$$r_{ik} = e_{ik} = \frac{1}{\pi \varrho_k} \int_{p_1}^{p_2} \int_{q_1}^{q_2} U_{ik}(p,q)\, dp\, dq \qquad (22)$$

Die gesuchte Beziehung zwischen den r_{ik} und den e_{ik} ist damit gefunden, und zwar sind die beiden Koeffizientenarten unter de

einschränkenden Bedingung, dass die Normalkomponente des Temperaturgradienten sich längs der Körperoberfläche nicht ändert, einander gleich.

§ 10 Die Aufstellung des Grundgleichungssystems

Nachdem gezeigt worden ist, dass die Koeffizienten e_{ik} und r_{ik} sich, allerdings unter gewissen einschränkenden Bedingungen, durch bekannte Grössen ausdrücken lassen, können wir nun zu der für den i-ten Körper geltenden Grundgleichung (5) zurückkehren. Unter Benutzung der Beziehung (22) erhält man aus ihr die Gleichung:

$$E_i = W_i + a_i \sum_{k=1}^{n} e_{ik} \left(E_k + E_k^{(r)}\right) \qquad (23)$$

in der jetzt sämtliche Koeffizienten bekannt sind bzw. berechnet werden können.

In dieser Gleichung stellt der Ausdruck unter dem Summenzeichen die Energie A_i dar, die von sämtlichen n-Körpern auf den i-ten Körper gestrahlt wird. Diese Energie multipliziert mit dem Reflexionsvermögen ρ_i des i-ten Körpers muss also die gesamte von ihm reflektierte Energie $E_i^{(r)}$ ergeben, so dass wird:

$$E_i^{(r)} = \rho_i \sum_{k=1}^{n} e_{ik} \left(E_k + E_k^{(r)}\right) \qquad (24)$$

Da die Gleichungen (23) und (24) für jeden der n-Körper gelten, so sind im ganzen 2 n lineare Gleichungen für die 2 n Unbekannten E_i und $E_i^{(r)}$ vorhanden. Dieses lineare, inhomogene Gleichungssystem soll Grundgleichungssystem genannt werden.

Dieses Grundgleichungssystem ist lösbar, wenn seine Determinante von Null verschieden ist. Mathematisch wird sich das Vorhandensein einer Lösung zwar schwer beweisen lassen, physikalisch ist dies aber ohne weiteres einzusehen, denn unter den am Anfang angegebenen Voraussetzungen muss sich ein Gleichgewichtszustand einstellen, in welchem die Temperaturen der Körper durch die zugeführten Energiemengen eindeutig bestimmt sind.

Nachdem im Vorhergehenden das Grundgleichungssystem für den Fall fehlender Wärmeleitung nach aussen aufgestellt worden ist, kann jetzt dieses Gleichungssystem so abgeändert werden, dass auch der Einfluss der in der Zeiteinheit abgeleiteten Wärmemenge Q_i in Rechnung gestellt wird. Der Einfluss der Wärmeleitung wirkt sich offenbar so aus, als ob dem i-ten Körper nicht die Energiemenge W_i sondern eine um Q_i verminderte, d.h. eine Energiemenge

$$V_i = W_i - Q_i \qquad (25)$$

zugeführt wird. Die Wärmeleitung nach aussen ist also berücksichtigt, sobald diese Hilfsenergie V_i statt W_i in die Grundgleichungen (23) und (24) eingeführt wird. Damit ergibt sich das Grundgleichungssystem schliesslich in der Form:

$$\left.\begin{aligned} E_i &= V_i + a_i \sum_{k=1}^{n} e_{ik}\,(E_k + E_k^{(r)}) \\ E_i^{(r)} &= \beta_i \sum_{k=1}^{n} e_{ik}\,(E_k + E_k^{(r)}) \end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

$$(i = 1 \ldots\ldots n)$$

§ 11 Die Ermittlung der gesuchten Körpertemperaturen T_i

Um mittels des Grundgleichungssystems (26) die gesuchten Körpertemperaturen T_i zu ermitteln, geht man so vor, dass man zunächst durch Auflösung des Systems die Energien E_i bestimmt. Bei fehlender oder zu vernachlässigender Wärmeleitung, d.h. für $Q_i = 0$, sind die so gefundenen E_i-Werte in die Gleichung (1) einzusetzen, wodurch sich dann die T_i unmittelbar ergeben. Bei nicht zu vernachlässigender Wärmeleitung werden jedoch die Hilfsenergien V_i von der Temperatur T_i abhängig, weil die dann in ihnen enthaltenen Q_i von T_i abhängen. Infolgedessen ergibt in diesem Fall die Lösung des Grundgleichungssystems (26) die E_i-Werte nicht als feste Werte, sondern als Funktionen der Körpertemperaturen T_i, d.h. es wird:

$$E_i = \Phi_i(T_1 \ldots\ldots T_n) \qquad i = 1 \ldots\ldots n$$

Wird in diese Gleichungen nun der für E_i aus (1) sich ergebende Wert $O_1 \cdot \gamma_i(T_i)$ eingeführt, so erhält man ein System von n Gleichungen:

$$\chi_i(T_1 \ldots\ldots T_n) = 0 \qquad (27)$$

für die unbekannten $T_1 \ldots T_n$. Diese Gleichungen sind allerdings nicht mehr linear, sondern es werden im Gegenteil die T_i irrationale Exponenten besitzen, so dass eine allgemeine Lösung nicht möglich ist. In der Praxis ist es aber meistensteils so, dass wenigsten bei dem grösseren Teil der n Körper die Wärmeleitung vernachlässigt werden kann und dass, sobald nur die Wärmeleitung von einem oder zwei Körpern in das System (27) eingeht, eine graphische Lösung stets möglich ist.

In jedem Fall braucht zur Berechnung der Körpertemperaturen das Grundgleichungssystem nur nach den Unbekannten E_i aufgelöst werden. Die Kenntnis der Hilfsunbekannten $E_i^{(r)}$ ist nicht erforderlich. Man sieht also, dass diese, wie bereits im § 6 behauptet wurde, bei der Lösung der Aufgabe vollkommen herausfallen. Darin ist es begründet, dass die Summenwerte der unendlichen Reihen des alten Verfahrens, die implicit in den $E_i^{(r)}$ enthalten sind, bei dem hier besprochenen Verfahren nicht benötigt werden.

Demnach zerfällt das neue Verfahren, in bezug auf die praktische Durchführung, in drei Absohnitte. Zunächst sind mit Hilfe der Gleichungen (9) und (12) die Koeffizienten e_{ik} zu berechnen, wobei die durch (16) gegebene Symmetriebeziehung eine wesentliche

Erleichterung bedeutet. Die bei dieser Berechnung auftretenden Integrationen können zwar unter Umständen sehr umständlich sein, im Prinzip handelt es sich jedoch immer nur um die Ausführung von Quadraturen. Es folgt nun weiter die Auflösung des linearen Grundgleichungssystems (26), die stets möglich ist. Schliesslich ist dann noch die mittlere Körpertemperatur T_i entweder bei zu vernachlässigender Wärmeleitung aus der Gleichung (1) oder aber bei nicht zu vernachlässigender Wärmeleitung durch Auflösung des Gleichungssystems (27) zu ermitteln.

§ 12 Die Anwendungsmöglichkeiten des neuen Verfahrens

Durch das angegebene neue Verfahren ist ein Weg gezeigt worden, auf dem jedes Wärmeübergangsproblem, das den zu Anfang erwähnten Voraussetzungen gehorcht, prinzipiell gelöst werden kann. Was die praktische Anwendbarkeit des Verfahrens anbetrifft, so ergibt sich eine Einschränkung durch die beiden Grundbedingungen, dass sowohl die Körpertemperatur als auch die Normalkomponente des Temperaturgradienten sich längs der Oberfläche der Körper nur wenig ändern dürfen. Das Erfülltsein dieser beiden Bedingungen kann allerdings nicht dadurch festgestellt werden, dass die beiden Restintegrale $\overline{\gamma}_{ik}$ und $\overline{\gamma}_{ik}^{(r)}$ explicit ausgerechnet werden, weil diese von der unbekannten Temperaturverteilung an der Körperoberfläche abhängen. Vielmehr muss man sich darauf beschränken, die Grösse dieser beiden Restintegrale abzuschätzen. Diese Abschätzung muss in der Weise erfolgen, dass aus der Form und der gegenseitigen Lage der Körper Schlüsse in bezug auf das zu erwartende Verhalten der Temperatur und ihres Gradienten gezogen werden.

Was insbesondere die zweite Grundbedingung anbetrifft, die die Voraussetzung für die Berechenbarkeit der Koeffizienten r_{ik} bildet, so ist diese bestimmt dann nicht erfüllt, wenn der Temperaturgradient an irgend einer Stelle der Körperoberfläche, z.B. an einer Kante eines der Körper, einen Sprung macht. Trotzdem lässt sich auch in diesem Falle das Rechenverfahren, wie im folgenden Teil dieser Arbeit gezeigt werden wird, durch eine geeignete Umformung noch anwenden.

Zum Schluss mag noch darauf hingewiesen werden, dass schon bei dem bereits erwähnten Zweikörperproblem eine wesentliche Vereinfachung der Rechnung durch das vorliegende Verfahren erzielt wird, indem statt der geometrischen Reihen nur ein einfaches System von vier linearen Gleichungen zu lösen ist.

B) Die Ermittlung der Elektrodentemperaturen einer n-Elektroden Röhre

§ 13 Die Problemstellung und die Voraussetzungen

Das im vorhergehenden Teil A angegebene neue Verfahren zur Lösung von Problemem des Wärmeübergangs durch Strahlung soll nun dazu benutzt werden, um die Temperatur zu ermitteln, welche das Stuergitter einer Elektronenröhre unter dem Einfluss der von der Kathode ausgestrahlten und von den übrigen Elektroden zurückgestrahlten Energie annimmt. Die Kenntnis dieser Temperatur ist, wie schon in der Einleitung erwähnt wurde, von sehr grosser Bedeutung für die

Untersuchung aller mit der thermischen Gitteremission zusammenhängenden Fragen. Darüber hinaus ist aber ein Verfahren, durch das die Gittertemperatur theoretisch ermittelt werden kann, wertvoll, indem es die Möglichkeit bietet, bei Neukonstruktionen von Röhren eine etwa auftretende erhöhte Temperatur des Steuergitters von vornherein festzustellen und durch geeignete Massnahmen zu vermeiden.

Bei dieser praktischen Anwendung des neuen Verfahrens wird es sich einmal darum handeln, zu zeigen, wie die Koeffizienten e_{ik} (Einstrahlzahlen) zahlenmässig zu berechnen sind. Ausserdem wird aber diese Anwendung ein Beispiel dafür liefern, dass das Verfahren auch auf Systeme angewandt werden kann, bei denen die zweite der beiden im ersten Teil angegebenen Grundbedingungen, welche die Voraussetzung für die Berechenbarkeit der Koeffizienten r_{ik} bildet, nicht erfüllt ist. Es wird gezeigt werden, dass durch gewisse Idealisierungen der Elektroden die Erfüllung der genannten Bedingung, nämlich eine hinreichende Konstanz der Normalkomponente des Temperaturgradienten längs der Körperoberfläche, erreicht werden kann, ohne dass dadurch die Allgemeingültigkeit des Verfahrens beschränkt wird.

Damit die Berechnung der Temperatur des Steuergitters oder allgemeiner diejenige aller Elektroden möglichst allgemein durchgeführt werden kann, soll zunächst die Anzahl n der Elektroden als beliebig gross angenommen werden. Demnach besteht die Röhre aus der Kathode, der Anode und n-2 zwischen diesen beiden Elektroden befindlichen Gittern. Da nur bei indirekt geheizten Röhren die Elektroden eine merkliche höhere Temperatur annehmen, so kann die Untersuchung auf solche Röhren beschränkt bleiben. Der Aufbau der Röhre kann dann, wie wohl immer bei indirekter Heizung, als zylindrisch vorausgesetzt werden. Alle Elektroden besitzen also eine gemeinsame Längsachse, und zwar sind Kathode und Anode regelrechte Zylinderflächen, während jedes Gitter im allgemeinen aus einer Wendel aus dünnem Draht besteht, welche als Schraubenlinie ebenfalls auf einer Zylinderfläche verläuft. Diese Zylinderfläche soll im folgenden als Gitterzylinder bezeichnet werden. Die einzelnen Windungen des Gitters werden getragen durch eine oder mehrere parallel zur Achse des Gitterzylinders verlaufende Streben, auf welche die Gitterwindungen aufgeschweisst sind. Sämtliche Elektroden sollen gleich lang sein, und zwar soll ihre Länge mit ℓ bezeichnet werden.

Dieses System der n-Elektroden ist von einem Glaskolben umgeben, welcher streng genommen ebenso wie die Elektroden eigene Strahlung aussendet und die auf ihn auffallende Strahlung reflektiert. Im Gegensatz zur Strahlung der Elektroden ist die Strahlung des Glakolbens jedoch im allgemeinen so gering, dass sie nicht berücksichtigt zu werden braucht. Die vom Glaskolben emittierte Strahlung kann nämlich stets vernachlässigt werden, weil wegen der Kühlung durch die Aussenluft die Temperatur des Glaskolbens nur wenig über Zimmertemperatur liegt, und auch die reflektierte Strahlung braucht im allgemeinen wegen des kleinen Reflexionsvermögens des Glases ebenfalls nicht berücksichtigt zu werden. Das gilt auch, wenn die Aussenseite des Kolbens mit einem Metallbelag bedeckt ist, da das Glas für die von den Elektroden ausgesandte langwellige Strahlung ein so grosses Absorptionsvermögen besitzt, dass der tatsächlich in das Innere der Röhre gelangende Teil der reflektierten Energie trotz des grossen Reflexionsvermögens der Metallschicht gering bleibt. Nur wenn ein Metallbelag die Innenseite des Kolbens bedeckt

muss die reflektierte Strahlung berücksichtigt werden, und zwar ist dann der Glaskolben als (n + 1)-te Elektrode des Systems zu betrachten. Die indirekt geheizten Röhren besitzen nun zwar in dem verdampften Getter einen solchen Metallbelag auf der Innenseite des Kolbens; da das Getter sich im allgemeinen aber nur auf eine sehr kleine Fläche erstreckt und sich ausserdem meistens ober- bzw. unterhalb des Elektrodensystems befindet, so kann im folgenden die Strahlung des Kolbens trotzdem als vernachlässigbar klein angenommen werden.

Zur Anwendung des allgemeinen Verfahrens auf die n-Elektrodenröhre müssen die Energiemengen W_i bekannt sein, welche den Elektroden in der Zeiteinheit zugeführt werden. Für die Kathode (i = 1) ist die Energie W_i gleich der von ihr verbrauchten Heizleistung; für die Anode und für die Gitter (i = 2...n) ist sie gleich der Anoden- bzw. Gitterverlustleistung, welche durch das Produkt aus Elektrodenstrom und Elektrodenspannung dargestellt wird.

Bei der praktischen Anwendung des Verfahrens ist es allerdings zweckmässig, statt der Heizleistung W_1 die Kathodentemperatur T_1 als bekannt vorauszusetzen. In diesem Fall kann nämlich die Hilfsenergie $V_1 = W_1 - Q_1$ aus dem Grundgleichungssystem eliminiert werden, und damit fällt die von der Kathode abgeleitete Wärmemenge Q_1, die rechnerisch nicht sehr genau erfasst werden kann, vollkommen aus den Rechnungen heraus. Diese Änderung bedeutet zwar eine Einschränkung des allgemeinen Verfahrens, die jedoch unwesentlich ist, da in allen praktisch vorkommenden Fällen die Temperatur der Elektroden stets in Abhängigkeit von der Kathodentemperatur untersucht wird. Trotz dieser Änderung des Verfahrens soll bei der Aufstellung des Grundgleichungssystems zunächst noch der Fall betrachtet werden, dass die Energie W_1 gegeben ist, denn dieser Fall besitzt den Vorzug, dass die aufzustellenden Gleichungen symmetrisch und damit übersichtlicher sind. Die Änderungen, die sich durch die Wahl der Kathodentemperatur als Ausgangspunkt der Rechnung ergeben, sollen erst weiter unten berücksichtigt werden.

§ 14 Die Untersuchung der Anwendbarkeit des Verfahrens

Ehe das neue Verfahren auf die n-Elektrodenröhre angewendet werden darf, muss untersucht werden, ob die beiden Grundbedingungen, welche die Anwendbarkeit des Verfahrens beschränken, und die als Temperatur- und Gradientenbedingung bezeichnet worden sind, für jede einzelne Elektrode erfüllt sind.

Von den Elektroden werde zunächst die indirekt geheizte Kathode betrachtet. Längs ihrer Oberfläche können grössere Temperaturunterschiede auftreten, so dass man von vornherein nicht angeben kann, ob die Temperaturbedingung für die Kathode erfüllt ist. Diese Tatsache ist aber für die Anwendbarkeit des Verfahrens ohne Bedeutung. Da nämlich, wie am Schluss des vorigen Paragraphen erwähnt wurde, die Temperatur der Kathode in den praktisch vorkommenden Fällen stets bekannt ist, so kann auch die Temperaturverteilung auf der Kathodenoberfläche als bekannt vorausgesetzt werden. In diesem besonders gearteten Fall ist es daher möglich, die auf die Kathode sich beziehenden Restintegrale $\overline{/}_{ik}$ explicit auszurechnen und die entsprechenden Koeffizienten e_{ik} auch bei beliebig grossen Temperaturunterschieden auf der Kathode zu ermitteln.

Die Berechnung der Restintegrale erfodert allerdings in dem Fall eine verhältnis grosse Rechenarbeit. Es sei daher schon an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass man sich diese Rechenarbeit bei der praktischen Anwendung des Verfahrens ersparen kann. Wie in einem späteren Paragraphen gezeigt werden wird, [5]) sind nämlich die Restintegrale Γ_{il} auch bei den grössten praktisch vorkommenden Temperaturuntersohieden auf der Kathode immer noch so klein, dass sie vernachlässigt werden können.

Nachdem die Berechenbarkeit der Koeffizienten e_{il} sicher stellt ist, muss nun weiterhin die für die r_{il} geltende zweite Grundbedingung untersucht werden. Zu diesem Zweck soll zunächst eine Beziehung zwischen dem auf die r_{il} sich beziehenden Restintegral $\Gamma_{il}^{(r)}$ und dem soeben besprochenen Restintegral Γ_{il} hergestellt werden. Wir betrachten dazu an Hand der Abb. 2 (Seite 15) die beiden Restintegralen $\Gamma_{il}^{(r)}$ bzw. Γ_{il} vorkommenden Funktionen — bzw. S_1 (p, q) . Von diesen stellt der Temperaturgradient $\frac{\partial T_1}{\partial \nu}$ multipliziert mit $\lambda_1 \cdot d\sigma$, die durch das Flächenelement $d\sigma$ in der Zeiteinheit fliessende Wärmemenge dar, während die spezifische Strahlungsintensität $S_1(p, q)$, multipliziert mit $\pi d\sigma$, die vom Oberflächenelement $d\sigma$ ausgestrahlte Energie darstellt. Nun ist bei der - indirekt geheizten - Kathode die von $d\sigma$ ausgestrahlte Energie im wesentlichen durch die Wärmemenge bestimmt, die vom Heizdraht im Innern der Kathode dem betreffenden Flächenelement zugeführt wird, während die durch Strahlung von den übrigen Elektroden zugeführte Energie im Verhältnis hierzu gering ist. Infolgedessen ist, wenn die beiden betreffenden Funktionen noch mit dem Faktor $\frac{1}{\pi}$ multipliziert werden:

$$\frac{\lambda_1}{\pi} \cdot \frac{\partial T_1}{\partial \nu} \sim S_1(p, q)$$

Die beiden Funktionen $\frac{\lambda_1}{\pi} \frac{\partial T_1}{\partial \nu}$ und $S_1(p, q)$ sind also nur wenig von einander verschieden. Nun wird (vergl. § 9) das Restintegral $\Gamma_{il}^{(r)}$ aus dem Restintegral Γ_{il} dadurch erhalten, dass man die Funktion S_1 (p, q) durch die Funktion $\frac{\lambda}{\pi} \frac{\partial T_1}{\partial \nu}$, und die Stelle (p^*, q^*), an der die Funktion S_1 ihren Mittelwert annimmt, durch die entsprechende Stelle (p', q') ersetzt. Aus der obigen Beziehung folgt daher, dass

$$\Gamma_{il}^{(r)} \sim \Gamma_{il} \qquad (28a)$$

ist. Ferner ist, wie ohne weiteres einzusehen, auch

$$\frac{\lambda_1}{\pi} \cdot \left(\frac{\partial T_1}{\partial \nu}\right)_{p'q'} \sim S_1(p^*, q^*) \qquad (28b)$$

Mit Hilfe der so gefundenen Beziehungen kann nun der Einfluss des Restintegrals $\Gamma_{il}^{(r)}$ in der Gleichung (20) abgeschätzt werden. Zu diesem Zweck schreiben wir die Gleichung (20) in der Form:

$$r_{ik} \cdot E_k^{(r)} \cdot \frac{\varrho_k}{a_k} \cdot \left\{ \left[S_k(p^*, q^*) \cdot \int_{p_1}^{p_2} \int_{q_1}^{q_2} U_{ik}(p, q)\, dp\, dq + \Gamma_{ik} \right] \right.$$

$$\left. \left[\frac{\lambda_1}{\pi} \left(\frac{\partial T_1}{\partial \nu}\right)_{p'q'} \cdot \int_{p_1}^{p_2} \int_{q_1}^{q_2} U_{ik}(p, q)\, dp\, dq + \Gamma_{ik}^{(r)} \right] \right\}$$

5) Vergl. § 20, S. 45

Wie bereits erwähnt wurde, wird im Paragraphen 20 gezeigt werden, dass das auf die e_{il} sich beziehende Restintegral $\int_{il}$ innerhalb der ersten eckigen Klammer der obigen Gleichung vernachlässigt werden kann. Hieraus folgt aber wegen der Gültigkeit der Gleichungen (28a) und (28b) dass auch das Restintegral $\int_{il}^{(r)}$ in der zweiten eckigen Klammer vernachlässigt werden darf. Infolgedessen ist also auch die zweite Grundbedingung bei der Kathode erfüllt, und die Koeffizienten r_{il} können ebenso wie die e_{il} berechnet werden.

Nach der Kathode werde nun die Anode betrachtet. Bei dieser ist, da die Anode durch einige verhältnismässig dünne Streben in der Röhre gehalten wird, die Wärmeableitung nach aussen gering. Infolgedessen sind die Temperaturunterschiede auf der Anodenoberfläche klein, so dass die Temperaturbedingung sicher erfüllt ist.

Zur Nachprüfung der zweiten Grundbedingung, die einen nahezu konstanten Temperaturgradienten längs der gesamten Anodenoberfläche fordert, muss dieser Temperaturgradient zunächst der Grössenordnung nach ermittelt werden. Dazu dient die folgende Betrachtung.

Da die Strahlung des Kolbens vernachlässigt werden kann, so wird nur die Innenseite der Anode von Strahlung getroffen. Infolgedessen muss von der Innenseite zur Aussenseite ein Wärmestrom Q fliessen. Die ihm entsprechende, zwischen den beiden Seiten vorhandene Temperaturdifferenz $\Delta T_n = \frac{\Delta r \cdot Q}{\lambda_n \cdot f}$ (Δr Dicke der Anode, f für den Wärmestrom wirksamer Querschnitt) ist nun zwar wegen der geringen Dicke Δr der Anode sehr klein. Für den Temperaturgradienten erhält man jedoch den Wert grad $T_n = \frac{Q}{\lambda_n \cdot f}$ einen Wert also, der in derselben Grössenordnung liegt, wie die von der Anode absorbierte Strahlungsmenge und der folglich von Null wesentlich verschieden ist.

Damit ist der absolute Wert des Temperaturgradienten der Grössenordnung nach ermittelt. Um nun mit Hilfe dieses Wertes zu untersuchen, ob die Gradientenbedingung erfüllt ist, muss man sowohl die Innen- als auch die Aussenseite der Anode betrachten. Beim Übergang von der einen zur anderen Seite kehrt sich aber die Richtung des Temperaturgefälles um, so dass der Temperaturgradient dabei auf einen Wert springt, der zwar gleich gross aber mit entgegengesetztem Vorzeichen behaftet ist. Da nun der oben ermittelte absolute Betrag des Gradienten von Null wesentlich verschieden ist, so besitzt der Gradient also auf den beiden Seiten der Anode vollkommen verschiedene Werte. Infolgedessen ist die Gradientenbedingung, die einen über die gesamte Oberfläche nahezu konstanten Temperaturgradienten fordert, bei der Anode sicher nicht erfüllt. Dadurch wird eine einfache Übertragung des angegebenen allgemeinen Verfahrens auf die n-Elektrodenröhre unmöglich.

Ein Ausweg aus dieser Schwierigkeit wird durch die folgende Überlegung gefunden. Zwar ist die Gradientbedingung für die gesamte Anodenoberfläche nicht erfüllt, wohl aber ist der Temperaturgradient infolge der geringen Wärmeableitung nach aussen auf jeder einzelnen Seite der Anode sicherlich nahezu konstant. Infolgedessen liegt es nahe, die Anwendung des neuen Verfahrens dadurch zu ermöglichen, dass die beiden Seiten der Anode getrennt betrachtet werden. In der Tat ist diese Trennung ja auch durch-

aus anschaulich. Da nämlich die Strahlung des Kolbens vernachlässigbar klein ist, so ist an allen Strahlungsübergängen innerhalb des Systems lediglich die Innenseite der Anode beteiligt, während ihre Aussenseite nur für die dem System verlorengehende Strahlung Bedeutung besitzt. Demgemäss soll also von nun ab die Berechnung der Koeffizienten nur auf die Innenseite der Anode bezogen und die reflektierte Energie $E_n^{(r)}$ nur dieser Innenseite zugeordnet werden. Durch diese Zuordnung ist dann wieder die Gleichheit der Koeffizienten e_{ik} und r_{ik}, für welche die Erfüllung der Gradientenbedingung die Voraussetzung war, sichergestellt und damit die Anwendung des allgemeinen Verfahrens ermöglicht.

Die soeben in bezug auf die Gradientenbedingung durchgeführten Überlegungen erscheinen auf die Anode angewandt etwas trivial, weil in diesem Fall die von der Aussenseite reflektierte Energie vernachlässigbar klein ist. Die volle Bedeutung erhalten sie erst bei der nun folgenden Anwendung auf die Gitter.

Auch bei den Gittern muss zu der Untersuchung, ob die Gradientenbedingung erfüllt ist - auf die Erfüllung der Temperaturbedingung wird später eingegangen werden - zunächst wieder der Verlauf des Temperaturgradienten längs der Oberfläche ermittelt werden. Im Gegesatz zur Anode trifft bei den Gittern auch auf die Aussenseite eine nicht zu vernachlässigende Strahlungsmenge. Im allgemeinen werden nun die auf die beiden Seiten auftreffenden Energiemengen voneinander verschieden sein, so dass auch bei den Gittern ein Wärmestrom von der einen zur anderen Seite fliessen wird. Infolgedessen geht der Temperaturgradient beim Übergang von der einen zur anderen Seite in gleicher Weise wie bei der Anode von einem positiven zu einem gleich grossen negativen Wert über. Dieser Übergang vollzieht sich aber nicht sprunghaft, wie bei der Anode, sondern der Gradient durchläuft wegen des runden Querschnittes der Gitterdrähte stetig alle dazwischenliegenden Werte. Infolgedessen reicht die getrennte Betrachtung der beiden Seiten allein nicht dazu aus, dass auch bei den Gittern die Gradientenbedingung erfüllt wird. Vielmehr müssen zu diesem Zweck die wirklich vorhandenen realen Gitter derart idealisiert werden, dass die Änderung des Gradienten beim Übergang von der Innen- zur Aussenseite sprunghaft vor sich geht. Die so erhaltenen idealisierten Gitter müssen natürlich in bezug auf den Strahlungsaustausch den realen möglichst gleichkommen.

Die Forderung, dass die erwähnte Änderung des Gradienten sprunghaft erfolgt, lässt sich dadurch erfüllen, dass die Dicke der Gitterwindungen und Streben verschwindend klein gemacht wird. Die weitere Forderung, dass die Energieaufnahme und -abgabe des idealisierten Gitters der des realen Gitters möglichst gleich ist, wird dann weitgehend erfüllt sein, wenn die für das Auftreffen bzw. die Abgabe der Strahlung massgebenden Flächen sich in den beiden Fällen nur sehr wenig voneinander unterscheiden. Um das zu erreichen, wird das reale Gitter von der Kathodenachse aus auf den Gitterzylinder projiziert. Dementsprechend ist das reale Gitter also durch ein idealisiertes zu ersetzen, welches aus kreisförmigen Ringen von verschwindender Dicke besteht, die aus dem Gitterzylinder herausgeschnitten sind. Die Anzahl dieser Ringe ist gleich der Anzahl der Windungen des realen Gitters, ihre Höhe gleich dem Durchmesser des Gitterwickeldrahtes und ihr gegenseitiger Abstand gerechnet von Mitte zu Mitte, gleich der Steigung der realen Git-

terwendel. Die Haltestreben des realen Gitters werden durch Blechstreifen verschwindender Dicke idealisiert, deren Breite dem Durchmesser der wirklich vorhandenen Gitterstreben gleich ist.

Die durch die Einführung des idealisierten Gitters erzielte sprunghafte Änderung des Temperaturgradienten ermöglicht es, alle in Bezug auf die Anode angestellten Überlegungen auf die Gitter zu übertragen. Wird nämlich vorausgesetzt, dass die Gitter eine nahezu konstante Temperatur besitzen - auf die Berechtigung dieser Voraussetzung wird weiter unten noch eingegangen werden - so erfüllt jede der beiden Seiten eines Gitters für sich die Gradientenbedingung. Damit dass in Teil A abgeleitete Verfahren angewendet werden kann, ist es infolgedessen nur noch notwendig, dass man die beiden Seiten des Gitters, ebenso wie vorher die der Anode, getrennt betrachtet. Im Gegensatz zur Anode ist allerdings, wie bereits erwähnt wurde, die auf die Aussenseite der Gitter treffende Strahlung nicht mehr verschwindend klein. Man muss daher die Strahlungsübergänge für jede einzelne der beiden Gitterseiten unabhängig von einander untersuchen und deswegen jeder Seite einen besonderen Koeffizienten im Grundgleichungssystem zuordnen. Die Frage, wie diese Zuordnung im einzelnen erfolgen muss und welche Änderungen sich dadurch für die Definition und Berechnung der Koeffizienten ergeben, wird erst im nächsten Paragraphen behandelt werden.

Durch diese Abänderung des Verfahrens, durch welche die Erfüllung der Gradientenbedingung gewährleistet wird, wird erreicht, dass die Koeffizienten e_{ik} und r_{ik} für jede der beiden Seiten jedes Gitters einander gleich sind. Die Aufteilung der Koeffizienten r_{ik}, die sich auf die reflektierten Energiemengen beziehen, bringt es mit sich, dass diese Energien ebenfalls für die Innen- und Aussenseiten der Gitter getrennt betrachtet werden müssen. Demgemäss soll von nun an ganz allgemein die in der Zeiteinheit von der Innenseite der i-ten Elektrode reflektierte Strahlung mit $E_i^{(ri)}$, die von deren Aussenseite reflektierte Energie mit $E_i^{(ra)}$ bezeichnet werden. Beide Energien besitzen dann für die $(n - 2)$ Gitter einen von Null verschiedenen Wert. Dagegen ist für die Kathode $E_1^{(ri)} = 0$, weil deren gesamte Energie nach aussen gestrahlt eird, und es ist für die Anode $E_n^{(ra)}$ gleich 0, weil die auf deren Aussenseite treffende Kolbenstrahlung als vernachlässigbar klein angenommen wird.

Durch die Aufspaltung der von den Gittern reflektierten Energiemengen erhöht sich natürlich die Zahl der Hilfsunbekannten um $(n - 2)$. Trotzdem bleibt aber das Grundgleichungssystem vollkommen bestimmt, weil, wie noch gezeigt werden wird, $(n - 2)$ neue Grundgleichungen erhalten werden.

Was schliesslich noch die Eigenemission der Elektroden anbetrifft, so ist diese im Gegensatz zur reflektierten Strahlung stets auf beiden Seiten gleich gross. Während nämlich die reflektierte Strahlung durch die auftreffende Strahlung bestimmt ist, hängt die Eigenstrahlung ausser vom Elektrodenmaterial nur von der Temperatur der betreffenden Elektrode ab. Da nun, wie für die Anode bereits gezeigt wurde, die zwischen den beiden Seiten jeder Elektrode vorhandene Temperaturdifferenz ΔT bei einigermassen gut wärmeleitendem Material sehr gering ist, so darf die Ausstrahlung der beiden Seiten stets als gleich gross angesehen werden. Dennoch lässt es die für die Berechnung der Koeffizienten notwendige ge-

trennte Betrachtung der beiden Seiten der Elektroden zweckmässig erscheinen, auch die Ausstrahlung E_i für jede der beiden Seiten getrennt zu betrachten. Demgemäss besitzt die Gesamtausstrahlung eines jeden Gitters und die der Anode den Wert $2\,E_i$; nur die Gesamtausstrahlung der Kathode behält wegen der fehlenden Innenseite auch weiterhin den Wert E_1.

Der Beweis, dass die Anwendung des neuen Verfahrens auf die n- Elektrodenröhre mit dem idealisierten Gittern wirklich zulässig ist, kann erst dann als vollständig geführt angesehen werden, wenn auch die oben eingeführte Voraussetzung nahezu konstanter Gittertemperatur mit der daraus sich ergebenden Folgerung eines nahezu konstanten Temperaturgradienten auf jeder der beiden Gitterseiten als zu Recht bestehendnachgewiesen wird. Diese Voraussetzung ist sicher dann erfüllt, wenn ebenso wie bei der Anode auch bei den Gittern die Wärmeableitung nach aussen sehr gering ist. Ist dies dagegen, wie in der Praxis wohl meistens, nicht der Fall, so werden längs des Gitters grössere Temperaturuntersohiede auftreten, so dass weder die Temperatur- noch die Gradientenbedingung streng erfüllt sind. Der dann auftretende Fehler hängt offenbar eng mit der Wärmeleitung im Gitter zusammen, und es kann daher auch erst bei deren Behandlung (vergl. §§ 21 - 24) näher darauf eingegangen werden. Als Ergebnis wird,wie hier vorwegnehmend erwähnt werden soll, gefunden werden, dass die Anwendbarkeit des Verfahrens in allen praktisch vorkommenden Fällen durch den Einfluss der Wärmeleitung nicht eingeschränkt wird.

§ 15 Die Einteilung der Koeffizienten in drei Klassen

Zur Ermittlung der Änderungen, welche die Definition und Berechnung der Koeffizienten durch die Unterteilung der Elektrodengesamtflächen in Innen- und Aussenseite erfahren muss, ist es notwendig, die verschiedenen Möglichkeiten des Strahlungsüberganges zwischen den einzelnen Elektroden näher zu untersuchen. Am zweckmässigsten geschieht dies dadurch, dass die Herkunft der auf die beiden Seiten einer beliebigen (i-ten) Elektrode auftreffenden Strahlung festgestellt wird. (vergl. Abb. 3, welche die Strahlungsübergänge an Hand eines Horizontalschnitts durch die n-Elektrodenröhre veranschaulicht).

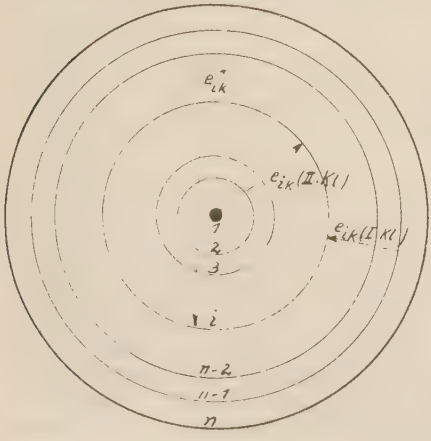


Abb3

Was zunächst die auf die Aussenseite der i-ten Elektrode fallende Strahlung anbelangt, so kann diese wegen der zylindrischen Anordnung offenbar nur von der Innenseite einer anderen ausserhalb der i-ten gelegenen Elektrode herrühren. Der Index k dieser strahlenden Elektrode ist also grösser oder gleich (i + 1).

Die auf die Innenseite der i-ten Elektrode treffende Strahlung kann einmal von den Aussenseiten derjenigen Elektroden stammen, welche innerhalb der i-ten liegen. Für diese ist der Index k kleiner oder gleich (i - 1). Weiterhin können aber auch die

Innenseiten aller übrigen Elektroden mit Ausnahme der Kathode, bei welcher ja die Innenseite fehlt, durch die Zwischenräume zwischen den Gitterwindungen hindurch Strahlung auf die Innenseite der i-ten Elektrode senden. Für diesen Strahlungsübergang unterliegt also der Index k der strahlenden Elektrode ausser der Bedingung $k \geqq 2$ keiner Beschränkung.

Offenbar müssen diese drei Möglichkeiten des Strahlungsüberganges begrifflich auseinander gehalten werden, was dadurch geschieht, dass jede von ihnen durch eine bestimmte Koeffizientenart gekennzeichnet wird. Hierin liegt die Änderung, welche die Definition der Koeffizienten durch die Unterteilung der Elektrodenoberflächen erfährt. Während bei dem allgemeinen Verfahren des Teiles A sämtliche Koeffizienten als gleichwertig angesehen werden dürfen, muss bei der n-Elektrodenröhre aus den angegebenen Gründen eine Einteilung der Koeffizienten in drei Klassen vorgenommen werden. Demgemäss setzen wir fest:

Für die Koeffizienten e_{ik} der ersten Klasse, deren Indizes durch die Bedingung $k \geqq i + 1$ bestimmt sein sollen, sei $e_{ik} \cdot E_k$ der Bruchteil der von der Innenseite der k-ten Elektrode ausgesandten Strahlung, der die Aussenseite der i-ten Elektrode trifft.

Für die Koeffizienten e_{ik} der zweiten Klasse, deren Indizes durch die Bedingung $k \leqq i - 1$ bestimmt sein sollen, sei $e_{ik} E_k$ der Bruchteil der von der Aussenseite der k- ten Elektrode ausgesandten Strahlung, welcher die Innenseite der i-ten Elektrode trifft.

Für die Koeffizienten e^*_{ik} der dritten Klasse sei $e^*_{ik} E_k$ der Bruchteil der von der Innenseite der k-ten Elektrode ausgesandten Strahlung, welcher die Innenseite der i-ten Elektrode trifft. Für diese Koeffizienten muss der Index $k \geqq 2$ sein.

Die Koeffizienten der ersten und zweiten Klasse brauchen in ihrer Bezeichnung nicht auseinandergehalten zu werden, denn für ein bestimmtes k besteht stets nur eine der beiden vorhandenen Übergangsmöglichkeiten, so dass eine Verwechselung nicht befürchtet zu werden braucht.

Alle diese Koeffizienten lassen sich mit Hilfe der Gleichungen (12) und (9) in Teil A berechnen, jedoch ist dabei entsprechend der jetzt vorgenommenen Zweiteilung der von jeder Elektrode ausgesandten Gesamtenergie als strahlende Oberfläche stets die einseitige Oberfläche der betrachteten Elektrode einzusetzen. Die wirkliche Berechnung dieser Koeffizienten, deren Gesamtzahl sich zu $(n - 1) \cdot (2n - 1)$ ergibt, soll erst in einem späteren Abschnitt vorgenommen werden; zunächst sollen die angestellten Betrachtungen durch die Aufstellung des für die n-Elektrodenröhre geltenden Grundgleichungssystems zu einem gewissen Abschluss gebracht werden.

§ 16 Das Grundgleichungssystem

Zur Aufstellung der Grundgleichungen werde die erste der in Teil A für den i-ten Körper angegebenen beiden Gleichungen (26) betrachtet. In ihr steht auf der linken Seite die vom i-ten Körper ausgestrahlte Energie. Diese besitzt, wie oben erwähnt, für $i = 1$ den Wert E_1, dagegen für $i \geqq 2$ den Wert $2 E_i$, sie ist also allgemein mit einem Faktor ε_i zu versehen, der für $i = 1$ den Wert 1 und für alle übrigen i den Wert 2 annimmt.

Die auf der rechten Seite der genannten Gleichung stehende Summe, welche die dem i-ten Körper von den übrigen Körpern zugestrahlte Energie darstellt, zerfällt jetzt entsprechend den drei verschiedenen Übergangsmöglichkeiten in drei Teilsummen mit den entsprechenden Koeffizienten der ersten, zweiten oder dritten Klasse. Bei der reflektierten Strahlung ist natürlich der Unterschied zwischen der von der Innen- und der von der Aussenseite reflektierten Energie zu beachten, und zwar beziehen sich gemäss ihrer Definition die Koeffizienten der ersten und dritten Klasse auf die von der Innenseite der k-ten Elektrode reflektierte Energie $E_k^{(ri)}$, die der zweiten hingegen auf die von der Aussenseite der k-ten Elektrode reflektierte Energie $E_k^{(ra)}$. Die Grenzen jeder der drei Teilsummen schliesslich ergeben sich aus dem bei der Definition angegebenen Geltungsbereich der betreffenden Koeffizienten, und zwar muss über diejenigen Werte von k summiert werden für welche ein Energieübergang zwischen den jeweils betrachteten Seiten der k-ten und der i-ten Elektrode möglich ist. Unter Berücksichtigung dieser Ausführungen ergibt sich schliesslich die Beziehung:

$$\varepsilon_i \cdot E_i = W_i + a_i \cdot \left\{ \sum_{k=i+1}^{n} e_{ik} \left(E_k + E_k^{(ri)} \right) + \sum_{k=1}^{i-1} e_{ik} \left(E_k + E_k^{(ra)} \right) + \sum_{k=2}^{n} e_{ik}^{*} \left(E_k + E_k^{(ri)} \right) \right\}$$

$$i = 1 \ldots\ldots n \qquad (29$$

$$\varepsilon_1 = 1$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \ldots\ldots = \varepsilon_n = 2 \qquad e_{1k}^{*} = 0$$

Damit sind die ersten n Gleichungen zur Bestimmung der Unbekannten E_i, $E_i^{(ri)}$ und $E_i^{(ra)}$ gewonnen. Ein weiteres System von Gleichungen ergibt sich aus der Tatsache, dass der zweite und der dritte Summand innerhalb der geschweiften Klammer von (29a) die gesamte Energie darstellen, welche die Innenseite der i-ten Elektrode trifft. Diese Gesamtenergie multipliziert mit dem Reflexionsvermögen ρ_i liefert die von der Innenseite der i-ten Elektrode reflektierte Energie $E_i^{(ri)}$, so dass man die Beziehung erhält:

$$E_i^{(ri)} = \rho_i \cdot \left\{ \sum_{k=1}^{i-1} e_{ik} \left(E_k + E_k^{(ra)} \right) + \sum_{k=2}^{n} e_{ik}^{*} \left(E_k + E_k^{(ri)} \right) \right\} \qquad (29$$

$$i = 2 \ldots\ldots n$$

Die noch fehlenden Gleichungen ergeben sich auf Grund der entsprechenden Überlegung, dass der erste Summand in der geschweiften Klammer von (29a) die gesamte auf die Aussenseite der i-ten Elektrode treffende Energie darstellt. Multipliziert man diesen Summanden mit dem Reflexionsvermögen ρ_i, so erhält man die von der Aussenseite der i-ten Elektrode reflektierte Energie $E_i^{(ra)}$. Es wird also:

$$E_i^{(n)} = \varrho_i \cdot \sum_{k=i+1}^{n} e_{ik}\left(E_k + E_k^{(n)}\right) \qquad (29c)$$

$$i = 1 \ldots (n-1)$$

Durch die drei Beziehungen (29a), (29b) und (29c) wird ein lineares System von 3n - 2 Gleichungen als Grundgleichungssystem für die n-Elektrodenröhre erhalten. Es ergibt sich also genau diejenige Zahl von Gleichungen, die zur Berechnung der 3n - 2 Unbekannten notwendig ist. Alle in bezug auf das Grundgleichungssystem in Teil A gemachten Bemerkungen behalten auch für den Fall der n-Elektrodenröhre ihre volle Gültigkeit.

§ 17 Die Grundgedanken der Koeffizientenberechnung

Zur zahlenmässigen Bestimmung der Elektrodentemperaturen mit Hilfe des soeben gefundenen Grundgleichungssystems sind die Koeffizienten e_{ik} durch die Bestimmungsstücke der Elektroden, d.h. ihre Koordinatenund Abmessungen, auszudrücken. Zu diesem Zweck muss der Übergang der Strahlung zwischen den einzelnen Elektroden eingehender betrachtet werden.

Offenbar trifft wegen der endlichen Länge der Elektroden nicht die gesamte von einer Elektrode ausgesandte Strahlung wieder auf Elektroden des Systems auf, sondern es geht an den Enden ein gewisser Bruchteil dem System nach aussen verloren. Dieser Strahlungsverlust muss natürlich bei der Berechnung der Koeffizienten berücksichtigt werden, denn diese geben ja, allgemein gesprochen, an, welcher Bruchteil der insgesamt von einer k-ten Elektrode ausgesandten Strahlung E_k eine i-te Elektrode unmittelbar trifft.

Der erwähnte Strahlungsverlust an den Enden ist nicht vorhanden, wenn die Elektroden als unendlich lang angesehen werden können, weil dann sämtliche Strahlungsübergänge ganz innerhalb des Systems erfolgen und lediglich die Anode Strahlung nach aussen abgibt. Es ist ohne weiteres einzusehen, dass sich deswegen bei unendlich langen Elektroden die Berechnung der Koeffizienten wesentlich einfacher gestalten muss und es liegt daher nahe, auch bei Elektroden von endlicher Länge die gesuchten Koeffizienten zunächst für unendlich lange Elektroden zu ermitteln und später erst die endliche Länge zu berücksichtigen. Um aber die Berechnung nicht mit unendlich grossen Werten für die Energien und Abmessungen durchführen zu müssen, wird man zweckmässigerweise ein Teilstück von der endlichen Länge l betrachten, dass aus den unendlich langen Elektroden durch zwei senkrecht zur Achse geführte Schnitte herausgeschnitten wird. Wird dieses endliche Stück in seiner Lage zwischen den beiden ins unendliche verlaufenden Reststücken belassen, so herrschen dieselben Strahlungsverhältnisse wie bei unendlich langen Elektroden, dagegen bleiben die Elektrodenabmessungen, welche man für die Untersuchung braucht, endlich, so dass ein Rechnen mit unendlichen Grössen vermieden wird.

Zunächst sollen also die Koeffizienten für eine derartige Röhre berechnet werden. Sie seien mit e_{ik}^{∞} für die erste und zweite Klasse, bzw. mit $e_{ik}^{\infty\infty}$ für die dritte Klasse bezeichnet. Bei dieser Berechnung sollen die Abmessungen und gegenseitigen Abstände der Elektroden beliebige Werte besitzen.

Prinzipiell müssten sich die gesuchten Koeffizienten mit Hilfe der in § 7 angegebenen Integrationen ermitteln lassen. Dazu wäre, wie aus den Überlegungen des § 7 hervorgeht, für jeden Punkt einer Seite der strahlenden k-ten Elektrode eine Integration über die beiden Winkel ϑ und φ derart vorzunehmen, dass der zugehörige Fahrstrahl die gesamte betrachtete Seite der auffangenden i-ten Elektrode bestreicht, ohne dabei eine der dazwischenliegenden Elektroden zu schneiden. Demnach würde also, wenn die i-te und die k-te Elektrode nicht unmittelbar benachbart sind, der Integrationsbereich in eine Anzahl von Teilbereichen zerfallen. Diese Anzahl wird sehr gross, wenn sich ein oder mehrere Gitter unter den dazwischenliegenden Elektroden befinden, weil dann jede einzelne Gitterwindung eine Unterteilung des Integrationsbereiches notwendig macht. Deshalb würde eine allgemeine Berechnung der Koeffizienten auf diesem Wege zum mindesten auf sehr grosse Schwierigkeiten stossen. Die Schwierigkeiten werden vermieden, wenn ein Verfahren benutzt wird, welches die besonderen Eigenschaften der in technischen Röhren verwendeten Gitter ausnutzt. Dieses Verfahren besitzt ausserdem, wie sich zeigen wird, noch den Vorteil, dass es auf viel bequemere Weise, nämlich ohne jede Integration, zum Ziele führt. Integrationen werden erst später bei der Erweiterung der Koeffizientenberechnung auf Elektroden endlicher Länge notwendig sein.

Die Eigenschaften der in technischen Röhren verwendeten Gitter, welche die angedeutete vereinfachte Berechnung der Koeffizienten ermöglichen, bestehen einmal darin, dass die Anzahl der Gitterwindungen stets gross ist und dass der Durchmesser des Gitterwickeldrahtes klein ist im Verhältnis zur Gittersteigung und zum gegenseitigen Abstand der Elektroden. Ferner ist auch der Durchmesser der Gitterstreben klein gegenüber ihrem gegenseitigen Abstand und gegenüber der Entfernung der Elektroden voneinander. Alle diese Tatsachen wollen wir unter den Begriff der "feinen Gitterunterteilung" zusammenfassen. Dementsprechend soll für die weiteren Untersuchungen vorausgesetzt werden, dass sämtliche Gitter "fein unterteilt" sind.

Im folgenden soll nun gezeigt werden, inwiefern durch die "feine Gitterunterteilung" eine vereinfachte Berechnung der Koeffizienten ermöglicht wird. Dazu werde wiederum der Strahlungsübergang von der strahlenden k-ten zur auffangenden i-ten Elektrode betrachtet, und zwar soll zunächst angenommen werden, dass die strahlende Elektrode sich innerhalb der bestrahlten befindet, k also kleiner oder gleich (i - 1) ist. Wenn unter dieser Voraussetzung zunächst zwei Elektroden betrachtet werden, die unmittelbar aufeinanderfolgen, so trifft die gesamte von der betreffenden Seite der k-ten Elektrode ausgesandte Strahlung auf die Innenseite der i-ten Elektrode bzw. des zugehörigen Gitterzylinders. Befinden sich dagegen, wie es im allgemeinen der Fall sein wird, zwischen den beiden betrachteten Elektroden noch ein oder mehrere Gitter, so schirmen diese einen Teil der von der k-ten Elektrode ausgesandten Strahlung ab. Nur der restliche Bruchteil wird durchgelassen und trifft die an der Stelle der i-ten Elektrode befindliche Zylinderfläche. Zur Ermittlung dieses durchgelassenen Bruchteils soll zunächst die Abschirmwirkung für den Fall untersucht werden, dass nur ein einziges abschirmendes Gitter vorhanden ist. Jede einzelne Windung dieses Gitters erzeugt dann in dem betrachteten Strahlengang einen Schatten, und zwar wird bei der vorausgesetzten feinen Gitterunterteilung der Kernschatten wegen der geringen Dick

der Windungen verhältnismässig kurz sein. Infolgedessen sind die Schattenbilder der einzelnen Windungen an der Stelle des verhältnismässig weit entfernten auffangenden Gitterzylinders bereits sehr verwaschen. Bei der grossen Anzahl der Gitterwindungen wird daher die Überlagerung der Schattenbilder sämtlicher Windungen keinerlei durch die Abschirmung bewirkte Maxima und Minima der Intensität längs der auffangenden Fläche ergeben. Daher wird die Strahlungsdichte der vom abschirmenden Gitter hindurchgelassenen Strahlung lediglich in einem konstanten Verhältnis geschwächt sein. Die Verteilung der Strahlungsdichte der durchgelassenen Strahlung ist also bei feiner Gitterunterteilung entlang der auffangenden Fläche die gleiche wie diejenige, welche bei fehlendem abschirmenden Gitter vorhanden wäre. Im Gegensatz dazu wäre bei sehr wenigen oder sehr dicken Gitterwindungen, d.h. wenn die Voraussetzung der feinen Gitterunterteilung nicht erfüllt ist, die Verteilung der Strahlungsdichte entlang der aufffangenden Fläche abhängig von der Anzahl und den Abmessungen der Windungen des abschirmenden Gitters.

An diesen Überlegungen ändert sich nichts, wenn statt des einen mehrere abschirmende Gitter vorhanden sind. Die gesamte abschirmende Wirkung, welche alle zwischen der k-ten und der i-ten Elektrode befindlichen Gitter auf die von der betreffenden Seite der k-ten Elektrode ausgestrahlte Energie E_k ausüben, lässt sich also bei feiner Gitterunterteilung dadurch berücksichtigen, dass diese Energie E_k mit einem Faktor α_{ik} multipliziert wird. Aus Zweckmässigkeitsgründen soll die Grösse $\alpha_{ik} E_k$ denjenigen Bruchteil der Energie E_k angeben, der von den abschirmenden Gittern durchgelassen wird. Der Faktor α_{ik} soll demgemäss als "Durchlassfaktor" bezeichnet werden.

Von der Energie $\alpha_{ik} E_k$, welche auf die an der Stelle der i-ten Elektrode befindliche Zylinderfläche auftrifft, wird nur ein gewisser Bruchteil aufgefangen, wenn die auffangende Elektrode ein Gitter ist. Der nicht aufgefangene Rest geht durch die Gitterlücken hindurch zu anderen Elektroden weiter. Der aufgefangene Bruchteil lässt sich dadurch bestimmen, dass die auf die ganze Zylinderfläche auftreffende Strahlung mit einem zweiten Faktor β_{ik} multipliziert wird, der "Auffangfaktor" genannt werden soll. Dieser Auffangfaktor β_{ik} hängt von den Abmessungen des auffangenden Gitters und der Verteilung der Strahlungsdichte der auf das auffangende Gitter fallenden Strahlung ab. Da sich nach den oben gemachten Ausführungen die Verteilung der Strahlungsdichte durch die Abschirmwirkung irgendwelcher vorhergehender Gitter nicht ändert, so ist der Auffangfaktor mit und ohne Abschirmung der gleiche. Der Auffangfaktor ist demnach unabhängig von dem Durchlassfaktor.

Durch die beiden voneinander unabhängigen Faktoren α_{ik} und β_{ik} sind die Koeffizienten e^{∞}_{ik} bzw. $e^{*\infty}_{ik}$ eindeutig bestimmt. Diese geben nämlich definitionsgemäss an, welcher Bruchteil der von einer Seite der k-ten Elektrode ausgesandten Strahlungsmenge E_k auf eine Seite der i-ten Elektrode fällt. Da nach dem Vorhergehenden die zwischen den beiden Seiten dieser Elektroden übergehende Strahlungsmenge den Wert $\alpha_{ik} \cdot \beta_{ik} E_k$ besitzt, so ergeben sich für die Koeffizienten die Werte

$$e^{\infty}_{ik} = \alpha_{ik} \beta_{ik}$$
$$e^{*\infty}_{ik} = \alpha_{ik} \cdot \beta_{ik} \qquad (30)$$

Zur Berechnung der Koeffizienten mit Hilfe dieser Beziehung sind zuerst die Auffangfaktoren zu bestimmen. Das geschieht, indem man sich die zwischen der ausstrahlenden und der auffangenden Elektrode befindlichen Gitter entfernt denkt, und dadurch einen ungehinderten Strahlungsübergang ermöglicht. Sind auf diese Weise die Auffangfaktoren, die zu allen Koeffizienten einer bestimmten Klasse gehören, ermittelt, so lassen sich die Durchlassfaktoren leicht berechnen. Um nämlich den Durchlassfaktor für einen bestimmten Strahlungsübergang zu erhalten, muss man von der Strahlung, die bei fehlender Abschirmung auf den Gitterzylinder trifft, der sich an der Stelle der bestrahlten i-ten Elektrode befindet, diejenige Strahlung abziehen, welche von den abschirmenden Gittern aufgefangen wird. Die zuletzt genannte Strahlungsmenge ergibt sich mit Hilfe der zuvor berechneten Auffangfaktoren.

Die bisherigen Überlegungen sind unter der Voraussetzung vorgenommen worden, dass die strahlende k-te Elektrode sich innerhalb der bestrahlten i-ten Elektrode befindet ($k \leqq i - 1$). Zur Ermittlung der noch fehlenden Koeffizienten muss weiterhin nun auch der umgekehrte Fall, dass die strahlende Elektrode ausserhalb der bestrahlten liegt, k also grösser oder gleich i + 1 ist, betrachtet werden. Dabei ergibt sich jedoch ein nicht unwesentlicher Unterschied gegenüber dem zuerst betrachteten Fall. Während nämlich unter der Voraussetzung $k \leqq i - 1$ beim Fehlen jeglicher Abschirmung die gesamte von der k-ten Elektrode ausgesandte Strahlung den an der Stelle der i-ten Elektrode befindlichen Gitterzylinder trifft, geht im Fall $k \geqq i + 1$ ein Teil dieser Strahlung an dem bestrahlten Gitterzylinder vorbei. Trotz dieser veränderten Verhältnisse kann zwar auch im letzteren Fall die Zerlegung der Koeffizienten in zwei voneinander unabhängige Faktoren entsprechend den Formeln (30) vorgenommen werden, jedoch wäre die praktische Berechnung dieser Faktoren schwieriger auszuführen als in dem vorher untersuchten Fall $k \leqq i - 1$. Diese Unbequemlichkeit lässt sich vermeiden, wenn man zur Berechnung der Koeffizienten, welche zum Strahlungsübergang für $k \geqq i + 1$ gehören, die in § 8 (Teil A) abgeleitete Symmetriebeziehung verwendet. Auf diese Symmetriebeziehung soll daher zunächst noch etwas näher eingegangen werden.

Bei dem in Teil A behandelten allgemeinen Problem des Strahlungsüberganges zwischen n beliebigen Körpern verband die Symmetriebeziehung immer je zwei Koeffizienten e_{ik} und e_{ki}, welche auseinander durch Vertauschung der im übrigen ungeändert bleibenden Indizes i und k hervorgehen. Diese Indizesvertauschung bedeutet physikalisch eine Umkehrung des Strahlenganges, derart, dass der strahlende Körper k zum absorbierenden wird und umgekehrt. Da bei der n-Elektrodenröhre die den verschiedenen Strahlungsübergängen zuzuordnenden Koeffizienten in drei Klassen eingeteilt wurden (vergl. § 15), so muss die Symmetriebeziehung für jede dieser drei Koeffizientenklassen ermittelt werden.

Wird die Indizesvertauschung an einem Koeffizienten e_{ik} der ersten Klasse vorgenommen, welcher also definitionsgemäss der Bedingung $k \geqq i + 1$ genügt, so entsteht ein Koeffizient e_{ki}, für welchen $i \leqq k - 1$ ist, der also der zweiten Klasse angehört. Die mit der Indizesvertauschung gleichbedeutende Umkehrung des Strahlenganges führt also die Koeffizienten der ersten und der zweiten Klasse ineinander über. Infolgedessen müssen die Koeffizienten dieser beiden Klassen durch die Symmetriebeziehung miteinander verbunden sein. Es ist also nach Gleichung (16):

$$O_k \cdot e_{ik} = O_i \cdot e_{ki} \qquad (31a)$$

Bei den noch übrig bleibenden Koeffizienten der dritten Klasse entsteht bei der Vertauschung der Indizes jedesmal wieder ein Koeffizient derselben Klasse, da die Indizes dieser Koeffizientenklasse ja keiner einschränkenden Bedingung unterliegen. Die Koeffizienten der dritten Klasse sind also durch die Symmetriebeziehung unter sich miteinander verbunden, und es gilt:

$$O_k \cdot e_{ik}^{*} = O_i \cdot e_{ki}^{*} \qquad (31b)$$

Zusammenfassend ergibt sich demnach, dass bei der n-Elektrodenröhre die Symmetriebeziehung in zwei Gleichungen zerfällt, deren Form die gleiche ist, wie die der für n beliebige Körper geltenden Symmetriebeziehung.

Mit Hilfe der beiden Gleichungen (31a) und (31b) können sämtliche Koeffizienten für die Strahlungsübergänge, welche für $k \leqq i + 1$ möglich sind, berechnet werden, wenn die Koeffizienten für die für $k \leqq i - 1$ möglichen Strahlungsübergänge mittels der Formeln (30) ermittelt worden sind.

Damit ist gezeigt worden, dass sich sämtliche Koeffizienten für den Strahlungsübergang zwischen den unendlich langen Elektroden der n-Elektrodenröhre ohne jede Integration dadurch berechnen lassen, dass die Koeffizienten in zwei voneinander unabhängige Faktoren zerlegt werden. Die notwendige Voraussetzung für diese Zerlegung ist die "feine Gitterunterteilung". Ohne diese wäre nämlich der Auffang- von dem Durchlassfaktor abhängig und eine getrennte Berechnung beider nicht möglich.

§ 18 Die Berechnung der Koeffizienten der ersten und zweiten Klasse für unendlich lange Elektroden

Im folgenden soll weiterhin gezeigt werden, wie die Koeffizienten durch die gegebenen Abmessungen der Elektroden zahlenmässig ausgedrückt werden können. Entsprechend den im vorigen Paragraphen angegebenen Grundgedanken ist dabei zuerst der Strahlungsübergang für ein Stück von der Länge ℓ der im übrigen unendlich langen Elektroden zu betrachten. Von den Koeffizienten sollen zunächst die mit e_{ik}^{∞} bezeichneten der ersten und zweiten Klasse berechnet werden. Dazu werde der Übergang der Strahlung der Kathode zu einem beliebigen Gitter, welches den Index i besitzen soll, betrachtet. Die beiden zugehörigen Faktoren β_{i1} und α_{i1}, aus denen sich der zugehörige Koeffizient e_{i1}^{∞} zusammensetzt, sind in der schon angegebenen Weise nacheinander zu bestimmen.

Um den Auffangfaktor β_{i1} zu ermitteln, denkt man sich die abschirmenden Gitter entfernt, so dass die gesamte Kathodenstrahlung auf den Gitterzylinder mit dem Index i trifft. Wegen der unendlichen Länge und der Zylindersymmetrie der Elektroden muss die Strahlungsdichte an allen Stellen des bestrahlten Gitterzylinders die gleiche sein. Der Auffangfaktor ergibt sich infolgedessen einfach als das Verhältnis der einseitigen Oberfläche O_i des idealisierten Gitters zur einseitigen Oberfläche des Gitterzylinders, welche mit $O_i^{(z)}$ bezeichnet werden soll. Dieses Oberflächenverhältnis, welches kurz v_i genannt werden soll, lässt sich durch die Ab-

messungen des Gitters ausdrücken, und zwar ergibt sich bei Verwen
dung folgender Bezeichnungen: r_i Radius des Gitterzylinders, δ_i
Durchmesser des Gitterwickeldrahtes, δ_i' Durchmesser der Gitterstr
ben, m_i Anzahl der Streben und s_i Steigung des i-ten Gitters:

$$\nu_i = \frac{O_i}{O_i^{(z)}} = \frac{\delta_i}{s_i} + m_i \cdot \frac{\delta_i'}{2\pi r_i} \cdot \left(1 - \frac{\delta_i}{s_i}\right) \qquad (32$$

$$\nu = 2 \ldots\ldots (n-1)$$

Damit wird der gesuchte Auffangsfaktor

$$\beta_{i1} = \nu_i$$

Der somit bestimmte Auffangfaktor gilt für jedes beliebige Gitter, insbesondere also auch für die vorher entfernten abschirmenden Gitter mit dem Index 2, ...(i - 1). Infolgedessen kann mit Hilfe dieses Auffangfaktors nunmehr der Durchlassfaktor für d Strahlungsübergang zwischen der Kathode und dem Gitter mit dem In dex i ermittelt werden. Von dem ersten Gitter wird der Bruchteil $\nu_2 E_1$ der Kathodenstrahlung aufgefangen, der Rest $(1 - \nu_2)$. E_1 wir durch die Lücken dieses Gitters hindurchgelassen. Von dieser duro gelassenen Strahlung fängt das zweite Gitter den Bruchteil ν_3 (1 E_1 auf, während der Rest $(1 - \nu_3)$ $(1 - \nu_2)$.E_1 wiederum hindurchge lassen wird. Dementsprechend lässt schliesslich das letzte absohi mende Gitter mit dem Index i - 1 die Energiemenge

$$(1-\nu_2)\cdot(1-\nu_3)\cdot(1-\nu_4)\ldots\ldots(1-\nu_{i-1})\cdot E_1 = \prod_{\mu=2}^{i-1}(1-\nu_\mu)\cdot E_1$$

hindurch. Hierin stellt der Faktor von E_1 den gesuchten Durchlass faktor α_{i1} dar.

Das Produkt der beiden so gefundenen Faktoren β_{i1} und α_{i1} liefert schliesslich den gesuchten Koeffizienten e_{i1}^{∞}, der sich also zu

$$e_{i1}^{\infty} = \nu_i \cdot \prod_{\mu=2}^{i-1}(1-\nu_\mu) \qquad (33)$$

ergibt.

Weiterhin kann nun sofort der allgemeine Koeffizient der zw ten Klasse e_{ik}^{∞} $(k \leqq i - 1)$ berechnet werden, indem statt der Kath denstrahlung die Strahlung der Aussenseite eines beliebigen Gitte mit dem Index $k \leqq i - 1$ betrachtet wird. Diese Strahlung des Git ters wird zwar streng genommen auch beim Fehlen jeglicher Abschir wirkung nicht vollkommen gleichmässig über den auffangenden Gitte zylinder verteilt sein, weil im Gegensatz zur Kathode nicht eine volle Zylinderfläche emittiert. Wegen der grossen Anzahl der Gitte windungen werden aber die Unterschiede in der Verteilung der Stra lung so geringfügig sein, dass sie praktisch vernachlässigt werde können. Unter der Voraussetzung gleichmässiger Verteilung der Str lungsdichte ergibt sich dann für den Auffangfaktor bei der Strah lung eines Gitters der gleiche Wert wie bei der Strahlung der Ka thode. Infolgedessen ändert sich auch der Absohirmfaktor nicht, u es wird der allgemeine Koeffizient der zweiten Klasse aus Gleichu (33) dadurch erhalten, dass der Index 1 durch den Index k ersetzt wird, so dass sich ergibt:

$$e_{ik}^{\infty} = v_i \cdot \prod_{\mu=k+1}^{i-1} (1 - v_\mu) \qquad (34)$$

$$k \leq i-1$$

Hieraus wird der allgemeine Koeffizient der ersten Klasse durch einfache Anwendung der durch Gleichung (31a) gegebenen Symmetriebeziehung gefunden. Zunächst wird nämlich danach:

$$e_{ki}^{\infty} = v_i \cdot \frac{O_k}{O_i} \cdot \prod_{\mu=k+1}^{i-1} (1 - v_\mu)$$

Das hierin noch unbekannte Verhältnis O_k/O_i ergibt sich nach Gleichung (32) zu:

$$\frac{O_k}{O_i} = \frac{v_k}{v_i} \cdot \frac{r_k}{r_i} \qquad (35)$$

Wird der so gefundene Wert für O_k/O_i in die vorletzte Gleichung eingeführt und werden gleichzeitig die Indizes i und k vertauscht, so erhält man als allgemeinen Koeffizienten der ersten Klasse:

$$e_{ik}^{\infty} = v_i \cdot \frac{r_i}{r_k} \cdot \prod_{\mu=i+1}^{k-1} (1 - v_\mu) \qquad (36)$$

$$k \geq i+1$$

Die Koeffizientenformeln sind bisher nur für den Fall abgeleitet worden, dass die Auffangelektrode ein Gitter ist. Sie lassen sich aber ohne weiters auch auf die Kathode bzw. auf eine aus massivem Blech bestehende Anode als Auffangelektrode übertragen, und zwar ist in diesen beiden Fällen v_1 bzw. $v_n = 1$ zusetzen, weil die gesamte Elektrodenoberfläche strahlungsauffangend wirkt. Nicht bei allen Röhren besteht nun aber die Anode aus einem Blechzylinder, vielmehr werden in den modernen indirekt geheizten Röhren fast ausschliesslich netzartige Anoden verwendet. Bei derartigen Anoden ist, wie aus dem bisher gesagten ohne weiteres folgt für v_n das Verhältnis der vom Netzdraht eingenommenen Fläche zur gesamten Zylinderfläche einzusetzen.

§ 19 Die Berechnung der Koeffizienten der dritten Klasse für unendlich lange Elektroden

Nach der soeben durchgeführten Ermittlung der Koeffizienten e_{ik}^{∞} der ersten und zweiten Klasse bleibt schliesslich noch die Berechnung der Koeffizienten $e_{ik}^{*\infty}$ der dritten Klasse für den Strahlungsübergang zwischen unendlich langen Elektroden übrig.

Wir betrachten zunächst den Strahlungsübergang von der Innenseite des (k - 1) -ten Gitters, d.h. der k-ten Elektrode, auf die Innenseite des k-ten Gitters mit dem Index (k + 1). Der zugehörige Koeffizient $e_{(k+1),k}^{*\infty}$ besteht wiederum aus dem Auffang- und dem Durchlassfaktor, die nacheinander zu bestimmen sind. Zur Ermittlung des Auffangfaktors denken wir uns sämtliche innerhalb des (k - 1) ten Gitters liegenden Elektroden entfernt. Diese Massnahme allein genügt indessen noch nicht, um jede Abschirmung zu beseitigen, weil jetzt auch das strahlende Gitter selbst abschirmend auf seine eigene Strahlung wirkt. Um auch diesen abschirmenden Einfluss zu beseitigen, soll vorläufig angenommen werden, dass das strahlende Gitter für die von ihm ausgesandte Strahlung vollkommen durchlässig ist.

Weiterhin denken wir uns zunächst die beiden Gitter durch die zugehörigen Gitterzylinder ersetzt, wobei der innere Zylinder ebenfalls als vollkommen durchlässig für seine eigene Strahlung anzunehmen ist. Offenbar trifft dann die gesamte von der Innensei te des inneren Zylinders ausgesandte Strahlung auf den äusseren Zylinder auf. Die Dichte dieser Strahlung ist wieder wegen der un endlichen Länge und der zylindersymmetrischen Anordnung der Elektroden an allen Stellen des bestrahlten Gitterzylinders die gleic Ersetzt man also den bestrahlten äusseren Gitterzylinder mit dem Index (k + 1) wieder durch das zugehörige Gitter, so fängt dieses von der auftreffenden Strahlung einen Bruchteil auf, der wie im vorigen Paragraphen durch das Verhältnis der Oberfläche des Gitters zu der des zugehörigen Gitterzylinders gegeben ist. Dieses Verhältnis besitzt unter Benutzung der durch Gleichung (32) definierten Abkürzung den Wert:

$$v_{k+1} = \frac{O_{k+1}}{O^{(2)}_{k+1}}$$

Ferner ist nun auch der strahlende innere Gitterzylinder du das zugehörige Gitter zu ersetzen. Dieses ist jedoch vorläufig no als durchlässig anzunehmen. Wegen der grossen Anzahl der Gitterwindungen kann dann auf Grund der gleichen Überlegungen, wie sie im vorigen Paragraphen beim Übergang von der Kathoden- zur Gitter strahlung angestellt wurden, auch die Dichte der vom inneren Gitter ausgesandten Strahlung beim Auftreffen auf den äusseren Gitterzylinder als gleichmässig angesehen werden. Infolgedessen blei der Auffangsfaktor derselbe wie in dem vorher betrachteten Fall, in dem die Strahlung vom inneren Gitterzylinder ausgesandt wurde. Der gesuchte Auffangfaktor für den Strahlungsübergang von der Innenseite des (k - 1) ten Gitters zur Innenseite des k-ten Gitters besitzt daher den Wert:

$$\beta^{*}_{k+1,k} = v_{k+1} \qquad (37)$$

Es bleibt jetzt noch die Ermittlung des Durchlassfaktors übrig. Dieser zerfällt in dem hier betrachteten Fall des Strahlun Überganges von der Innenseite eines Gitters auf die Innenseite ei nes benachbarten mit grösserem Durchmesser in zwei Teilfaktoren, denn einmal schirmt das strahlende Gitter einen gewissen Bruchtei seiner eigenen Strahlung ab, und zweitens wirken auch die innerhalb des (k - 1)ten Gitters gelegenen Elektroden abschirmend. Die se beiden Teile des Durchlassfaktors sollen mit $\alpha^{*(1)}_{(k+1),k}$ bzw. $\alpha^{*(2)}_{(k+1),k}$ bezeichnet werden.

Um den zuerst genannten Bruchteil $\alpha^{*(1)}_{(k+1),k}$ zu finden, lässt man den Radius des äusseren Gitterzylinders gegen den des inneren konvergieren, also $r_{k+1} \to r_k$ gehen. Unter der Annahme, dass die Abmessungen der beiden Gitter die gleichen sind, fallen dann im Grenzfall $r_{k+1} = r_k$ die beiden Gitter zusammen. Wird nun die Voraussetzung, dass das innere Gitter durchlässig ist, fa len gelassen, das innere Gitter also der Wirklichkeit entsprechen als undurchlässig vorausgesetzt, so fängt es von der von ihm ausgesandten Strahlung den gleichen Bruchteil auf wie das äussere Gitter nach vollzogenem Grenzübergang. Folglich ergibt sich der Auffangfaktor des inneren Gitters für seine eigene Strahlung aus Gleichung (37) für $r_{k+1} \to r_k$ zu:

$$\beta^{*}_{k,k} = v_k$$

Daraus erhält man den gesuchten ersten Teil des Durchlassfaktors sofort zu:

$$\alpha^{*(1)}_{k+1,k} = 1 - \nu_k \qquad (38)$$

Die Abschirmwirkung des strahlenden Gitters auf seine eigene Strahlung ist damit bekannt.

Weiterhin denken wir uns jetzt die vorhin entfernten, innerhalb des (k - 1)ten Gitters gelegenen Elektroden wieder an ihre Plätze gebracht. Der von ihnen hindurchgelassene Teil der vom inneren Gitter ausgesandten Strahlung wird durch den zweiten Teil $\alpha^{*(2)}_{(k+1),k}$ des Durchlassfaktors bestimmt, der jetzt zu ermitteln ist.

Von der gesamten Strahlungsmenge E_k der Innenseite des (k-1)ten Gitters fällt dann ein gewisser Teil auf die Aussenseite der innerhalb von ihm gelegenen (k - 1) Elektroden, und zwar beträgt die Grösse dieses Teiles:

$$\sum_{\nu=1}^{k-1} e^{\infty}_{\nu,k} \cdot E_k$$

Ein zweiter Bruchteil fällt auf die Innenseite dieser Elektroden. Dieser Teil besitzt die Grösse:

$$\sum_{\nu=2}^{k-1} e^{*\infty}_{\nu,k} \cdot E_k$$

Der restliche Teil der Strahlungsmenge E_k, d.h. der Teil:

$$\left[1 - \sum_{\nu=1}^{k-1} e^{\infty}_{\nu,k} + \sum_{\nu=2}^{k-1} e^{*\infty}_{\nu,k}\right] E_k$$

wird von den innerhalb gelegenen Elektroden hindurchgelassen und trifft die Innenseite des (k -1)ten Gitterzylinders. Der zweite Teil $\alpha^{*(2)}_{(k+1),k}$ des Durchlassfaktors ergibt sich daher zu:

$$\alpha^{*(2)}_{k+1,k} = 1 - \sum_{\nu=1}^{k-1} e^{\infty}_{\nu,k} - \sum_{\nu=2}^{k-1} e^{*\infty}_{\nu,k} \qquad (39)$$

In diesem Durchlassfaktor ist auch der Teil der Strahlungsmenge E_k berücksichtigt, der von der Kathode abgeschirmt wird. Die Kathode erfüllt nun zwar keineswegs die Bedingung der feinen Gitterunterteilung, welche bei den Gittern erst die getrennte Berechnung von Auffang- und Durchlassfaktor ermöglicht. Trotz dieser veränderten Verhältnisse bleibt jedoch auch in dem Fall, dass die Kathode bei der Abschirmung mitwirkt, die getrennte Berechnung der beiden Faktoren zulässig. Die Kathode wirft nämlich für jeden Punkt einer strahlenden Elektrodenfläche einen Schatten, welcher symmetrisch zur Achse liegt und sich nach beiden Seiten zu ins Unendliche erstreckt. Wegen der zylindersymmetrischen Anordnung der strahlenden Elektrodenpunkte besteht daher die gesamte Abschirmwirkung der Kathode ebenso wie die der Gitter nur in einer Schwächung der Intensität der auffallenden Strahlung und nicht in einer Änderung der Intensitätsverteilung. Infolgedessen unterscheidet sich die abschirmende Wirkung der Kathode in nichts von der eines fein unterteilten Gitters und stört daher die getrennte Berechnung des Auffang- und Durchlassfaktors in keiner Weise.

Damit ist für den betrachteten Strahlungsübergang von der Innenseite der k-ten zur Innenseite der (k + 1)ten Elektrode der gesamte Durchlassfaktor gefunden. Er ergibt sich aus den Gleichungen (38) und (39) zu:

$$\alpha^{*}_{k+1\,k} = (1-\nu_k)\left[1 - \sum_{\nu=1}^{k-1} e^{\infty}_{\nu k} - \sum_{\nu=2}^{k-1} e^{*\infty}_{\nu k}\right] \qquad (40)$$

In dieser Beziehung sind nun eine Reihe noch unbekannter Koeffizienten enthalten. Infolgedessen ist es nicht möglich, die Koeffizienten der dritten Klasse, ebenso wie die der anderen beiden Klassen, explizit anzugeben, vielmehr kann zu ihrer Ermittlung nur eine Rekursionsformel aufgestellt werden. Das ist aber vollständig ausreichend, weil ja bei der praktischen Durchführung des Verfahrens niemals ein Koeffizient allein bestimmt wird, sondern zur Aufstellung des Grundgleichungssystems sowieso alle Koeffizienten berechnet werden müssen.

Aus dem durch (37) bestimmten Auffangfaktor und dem durch (40) gegebenen Durchlassfaktor erhält man den gesuchten Koeffizienten der dritten Klasse für den Übergang der Strahlung von der Innenseite des (k - 1)ten Gitters zu der des k-ten zu:

$$e^{*\infty}_{k+1\,k} = \nu_{k+1}(1-\nu_k)\left[1 - \sum_{\nu=1}^{k-1} e^{\infty}_{\nu k} - \sum_{\nu=2}^{k-1} e^{*\infty}_{\nu k}\right] \qquad (41)$$

Um die Berechnung der Koeffizienten von der Einschränkung zu befreien, dass die beiden betrachteten Gitter räumlich unmittelbar aufeinander folgen müssen, werde weiterhin statt des bisher benutzten auffangenden Gitters mit dem Index (k + 1) ein solches mit dem beliebigen Index i betrachtet, der allein der Einschränkung $i \geq k$ unterliegen soll. Das auffangende Gitter soll also ausserhalb des strahlenden liegen oder mit diesem identisch sein. Dann ändert sich an dem Auffangfaktor gar nichts; wohl aber tritt, wenn $i \geq (k + 2)$ ist, durch die zwischen der strahlenden und der auffangenden Elektrode befindlichen Gitter eine zusätzliche Abschirmwirkung auf, die durch die Einführung eines weiteren (dritten)Teildurchlassfaktors $\alpha^{*(3)}_{ik}$ berücksichtigt werden muss. Weil nun voraussetzungsgemäss das auffangende Gitter ausserhalb des strahlenden liegt, sind die Verhältnisse grundsätzlich die gleichen, wie bei dem im vorigen Paragraphen ausführlich behandelten Übergang der Strahlung von der Kathode auf ein beliebiges Gitter. Die Übertragung des dabei erhaltenen Ergebnisses liefert den gesuchten dritten Teil des Durchlassfaktors zu:

$$\alpha^{r(3)}_{ik} = \prod_{\mu=k+1}^{i-1}(1-\nu_\mu)$$

Damit ergibt sich der gesuchte Koeffizient der dritten Klasse für den Übergang der Strahlung von einem beliebigen (k -1)ten Gitter auf eine ausserhalb von ihm liegende i-te Elektrode zu:

$$e^{*\infty}_{ik} = \nu_i \cdot \prod_{\mu=k}^{i-1}(1-\nu_\mu)\left[1 - \sum_{\nu=1}^{k-1} e^{\infty}_{\nu k} - \sum_{\nu=2}^{k-1} e^{*\infty}_{\nu k}\right] \qquad (42)$$

$k \leq i$

Diese Beziehung gilt auch für den Fall, dass die beiden betrachteten Gitter zusammenfallen (k = i).

Aus der Gleichung (42) werden die noch fehlenden Koeffizienten $e^{*\infty}_{ik}$ für $k \geq i + 1$, d.h. für den Fall, dass die auffangende Elektrode innerhalb der strahlenden liegt, wiederum durch Anwendung der Symmetriebeziehung (31b) erhalten. Aus der Gleichung (31b) ergibt sich nämlich unter Benutzung von (35):

$$e^{*\infty}_{ik} = \nu_i \cdot \frac{r_i}{r_k} \cdot \prod_{\mu=i}^{k-1} (1 - \nu_\mu) \left[1 - \sum_{\nu=1}^{i-1} e^{\infty}_{\nu i} - \sum_{\nu=2}^{i-1} e^{*\infty}_{\nu i} \right] \qquad (43)$$

$k \geq i+1$

Die abgeleiteten Rekursionsformeln (42) und (43) gelten auch für den Fall, dass die auffangende Elektrode die Kathode oder Anode ist, wenn

$$\nu_1 = \nu_n = 1$$

gesetzt wird. Die beiden genannten Beziehungen ermöglichen daher, wie leicht einzusehen ist, die Berechnung sämtlicher Koeffizienten der dritten Klasse.

§ 20 Die Erweiterung der Koeffizientenberechnung auf Elektroden endlicher Länge

Im folgenden soll die Berechnung der Koeffizienten, welche sich bisher auf ein Teilstück von der Länge ℓ der im übrigen unendlichen langen Elektroden bezog, auf Elektroden endlicher Länge ausgedehnt werden. Für die folgenden Überlegungen denken wir uns deshalb die ins Unendliche reichenden Endstücke der Elektroden entfernt und betrachten das dann allein übrig bleibende endlich lange Mittelstück. Die Untersuchung der Strahlungsübergänge soll zuerst wieder unter der Voraussetzung vorgenommen werden, dass die strahlende Elektrode innerhalb der bestrahlten liegt (vergl. § 17). Im Gegensatz zu den bei unendlich langen Elektroden vorliegenden Verhältnissen trifft dann auch beim Fehlen jeglicher Abschirmung nicht mehr die gesamte von der strahlenden Elektrode ausgesandte Strahlungsmenge auf die an der Stelle der i-ten Elektrode befindliche gleich lange Zylinderfläche, sondern nur ein gewisser Bruchteil $f_{ik} \cdot E_k$, während der restliche Teil dem System an den Elektrodenenden verloren geht.

Wird nun zunächst einmal angenommen, dass der Faktor f_{ik} für alle Übergänge bekannt ist, so bleiben alle Überlegungen, welche in den vorhergehenden Paragraphen (§ 17 - 19) zur Aufstellung der Formeln für die Koeffizienten e^{∞}_{ik} bzw. $e^{*\infty}_{ik}$ führten, unverändert gültig, wenn an die Stelle der Strahlungsmenge E_k der Ausdruck $f_{ik} E_k$ gesetzt wird. Insbesondere können der Auffang- und der Durchlassfaktor in der gleichen Weise wie vorher eingeführt werden. Bei der Berechnung des Auffangfaktors darf zwar jetzt die Strahlungsdichte längs der auffangenden Zylinderfläche nicht mehr als vollkommen gleich angesehen werden, weil ja die Strahlungsintensität nach den Elektrodenenden zu abnimmt. Da jedoch wegen der feinen Gitterunterteilung die Anzahl der Windungen des auffangenden Gitters sehr gross ist, so ist die Änderung der Strahlungsdichte in

dem Bereich zwischen zwei aufeinanderfolgenden Windungen sehr ge
ring. Der Auffangfaktor ist daher ebenso wie bei unendlich lange
Elektroden durch das Verhältnis v der eigentlichen Elektrodenflä
che zur Fläche des betreffenden Gitterzylinders bestimmt. Infolg
dessen ergeben sich für die Auffang- und damit auch für die Durc
lassfaktoren genau dieselben Werte, wie sie in § 18 und 19 für
unendlich lange Elektroden gefunden wurden.

Auf Grund dieser Überlegungen erhält man die gesuchten Koe
fizienten e_{ik} bzw. e^{*}_{ik} einer Röhre mit endlich langen Elektroden
einfach dadurch, dass man die für die entsprechenden unendlich l
gen Elektroden gefundenen Koeffizienten e^{∞}_{ik} bzw. $e^{*\infty}_{ik}$ mit dem Fak
tor δ_{ik} multipliziert. Dieser Faktor δ_{ik} soll daher als "Endlich
keitsfaktor" bezeichnet werden. Es muss also sein:

$$e_{ik} = \delta_{ik} \cdot e_{ik}^{\infty} \qquad (44)$$

$$e^{*}_{ik} = \delta^{*}_{ik} \cdot e^{*\infty}_{ik}$$

Damit ist die Aufgabe der Koeffizientenermittlung für endlich la
ge Elektroden zurückgeführt auf die Berechnung der Endlichkeits-
faktoren δ_{ik} bzw. δ^{*}_{ik}.

Zur Lösung dieser Aufgabe ist festzustellen, welcher Bruch
teil der vom (k - 1)ten Gitterzylinder von der Länge l ausgesandt
Strahlung beim Fehlen jeglicher Abschirmung auf den (i - 1)ten
Gitterzylinder von der gleichen Länge trifft. Gemäss der Koeffi-
zientendefinition ist δ_{ik} als
einfach der Koeffizient, welc
zu dem Strahlungsübergang zwi
schen den beiden angegebenen
Gitterzylindern gehört. Die B
stimmung dieses Koeffizienten
muss unter Benutzung der in §
durchgeführten Betrachtungen
vorgenommen werden. Dabei wer
aber, wie es sich zeigen wird
die in § 7 angegebenen Integr
tionen sich nicht mehr wie be
den unendlich langen Elektrod
umgehen lassen, da die an den
Elektrodenenden verloren gehe
den Strahlungsbruchteile nur
mit Hilfe dieser Integrationen
erfasst werden können.

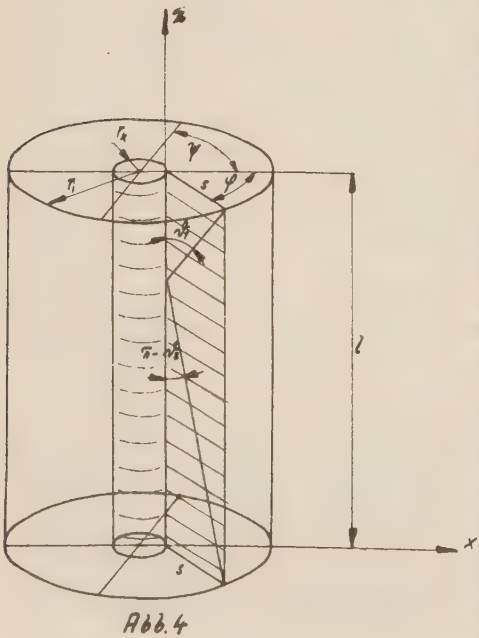


Abb. 4

Die Berechnung der End-
lichkeitsfaktoren δ_{ik} bzw. δ_{i}
erfolgt wiederum getrennt nac
Klassen. Zunächst soll der Fa
tor δ_{ik} für den Fall ermittel
werden, dass $k \leq i - 1$ ist, d.
dass der strahlende Gitterzyl
der innerhalb des bestrahlten
liegt. Der zugehörige Koeffiz
ent e_{ik} ist also dann nach un
rer Definition ein solcher de

zweiten Klasse. Zur Erleichterung des Verständnisses ist in Abb.4 eine perspektivische Zeichnung der beiden zu betrachtenden Gitterzylinder wiedergegeben. Als Koordinaten werden natürlich Zylinderkoordinaten benutzt, deren Achse mit der Achse des Elektrodensystems identisch ist. Dann ist also für die in § 7 benutzten allgemeinen Koordinaten p und q

$$p = z \qquad q = r \cdot \varphi$$

einzuführen, und es ergibt sich aus Gleichung (12) in § 7 für γ_{ik} der Wert:

$$\gamma_{ik} = \frac{r_k}{\pi \Theta_k} \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^{l} U_{ik}(\varphi, z)\, d\varphi\, dz \qquad (45)$$

Zur Berechnung von γ_{ik} mit Hilfe dieser Beziehung muss zunächst die Wärmeübertragungsfunktion U_{ik} ermittelt werden. Diese erhält man aus Gleichung (9) zu:

$$U_{ik}(\varphi, z) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \cos\varphi \cdot \sin^2\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \qquad (46)$$

In diesem Integral sind die Grenzen φ_1 und φ_2 für alle Punkte der Oberfläche die gleichen, und zwar besitzen sie die festen Werte:

$$\varphi_1 = -\frac{\pi}{2}; \qquad \varphi_2 = +\frac{\pi}{2}$$

Die Grenzen ϑ_1 und ϑ_2 sind dagegen für jeden Punkt der Oberfläche verschieden; sie sind sowohl von φ als auch von z abhängig. Eine Beziehung zwischen ϑ_1 bzw. ϑ_2 und φ und z lässt sich herstellen, wenn man die Entfernung s zwischen dem Flächenelement $d\sigma$ und einem beliebigen Punkt des bestrahlten Gitterzylinders, der in derselben Horizontalebene wie $d\sigma$ liegt, einführt. Es ist nämlich:

$$\operatorname{tg}\vartheta_1 = \frac{s(\varphi)}{l - z} \qquad \operatorname{tg}\vartheta_2 = \frac{-s(\varphi)}{z} \qquad (47)$$

und daher:

$$\vartheta_1 = \operatorname{arc\,tg} \frac{s(\varphi)}{l - z} \qquad \vartheta_2 = \pi - \operatorname{arc\,tg} \frac{s(\varphi)}{z}$$

s ist darin eine Funktion von φ allein. Sieht man vorläufig davon ab, dass diese Funktion s (φ) zunächst noch unbekannt ist, so lässt sich in (46) die Integration über ϑ durchführen, und es wird, wenn für ϑ_1 und ϑ_2 die Werte aus (47) eingesetzt werden:

$$U_{ik}(\varphi, z) = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \left\{ \pi + \frac{z \cdot s(\varphi)}{z^2 + s^2(\varphi)} + \frac{(l - z) \cdot s(\varphi)}{(l - z)^2 + s^2(\varphi)} \right. \qquad (48)$$

$$\left. - \operatorname{arc\,tg} \frac{s(\varphi)}{z} - \operatorname{arc\,tg} \frac{s(\varphi)}{l - z} \right\} d\varphi$$

Zur Bestimmung von γ_{ik} ist nun die Wärmeübertragungsfunktion U_{ik} in (45) einzusetzen. Wie aus Gleichung (48) zu ersehen ist, hängt die Funktion U_{ik} nicht von der Koordinate ψ ab, so dass die Integration über ψ in (45) unmittelbar ausgeführt werden kann. Dann wird:

$$\gamma_{ik} = \frac{r_k}{O_k} \cdot \int_0^{l} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \left\{ \pi + \frac{z \cdot s(\varphi)}{z^2 + s^2(\varphi)} + \frac{(l-z) \cdot s(\varphi)}{(l-z)^2 + s^2(\varphi)} \right.$$

$$\left. - \operatorname{arc\,tg} \frac{s(\varphi)}{z} - \operatorname{arc\,tg} \frac{s(\varphi)}{l-z} \right\} d\varphi \, dz$$

Weiterhin können dann die Integrationen über φ und z vertauscht werden, weil das Integral über φ feste Grenzen besitzt. Die Integration über z ist elementar ausführbar, und zwar wird durch Ausführung dieser Integration für γ_{ik} der Wert:

$$\gamma_{ik} = \frac{r_k}{O_k} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \cdot \left(\pi l - 2 l \operatorname{arc\,tg} \frac{s(\varphi)}{l}\right) d\varphi$$

erhalten. Wird hierin noch für die einseitige Oberfläche O_k des (k - 1)ten Gitterzylinders der Wert:

$$O_k = 2\pi r_k \cdot l$$

eingeführt, so ergibt sich schliesslich:

$$\gamma_{ik} = 1 - \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \cdot \operatorname{arc\,tg} \frac{s(\varphi)}{l} \, d\varphi \qquad (49)$$

In dieser Gleichung ist nun noch die vorhin eingeführte Funktion s (φ) unbekannt. Ihre Berechnung erfolgt mittels einer Beziehung, welche sich aus der Abb. 5, die einen Querschnitt durch Abb darstellt, ergibt, und zwar ist nach dem Cosinussatz

$$r_i^2 = r_k^2 + s^2 - 2 r_k s \cdot \cos(180 - \varphi)$$

Danach folgt für s der Wert:

$$s(\varphi) = r_k \cdot \left[\sqrt{\left(\frac{r_i}{r_k}\right)^2 - \sin^2\varphi} - \cos\varphi \right]$$

Es ist jetzt nur noch nötig, den so gefundenen Wert für s (φ) in die Gleichung (49) einzuführen, um den gesuchten Faktor γ_{ik} in der endgültigen Form:

$$\gamma_{ik} = 1 - \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \cdot \operatorname{arc\,tg} \frac{r_k}{l} \left[\sqrt{\left(\frac{r_i}{r_k}\right)^2 - \sin^2\varphi} - \cos\varphi \right] d\varphi \qquad (50)$$

zu erhalten. $k \leq i-1$

Aus dem so gefundenen Endlichkeitsfaktor γ_{ik} der zweiten Klasse der Koeffizienten wird mit Hilfe der Symmetriebeziehung der Endlichkeitsfaktor γ_{ik} der ersten Klasse, d.h. für $k \geq (i-1)$, gewonnen. Die Anwendung der Symmetriebeziehung und die damit verbundene Umkehrung des bisher betrachteten Strahlenganges liefert nämlich für den zugehörigen Koeffizienten den Wert:

$$\frac{r_k}{r_i} \cdot \gamma_{ik}$$

Hierin ist r_k/r_i der Auffangfaktor. Es ergibt sich also daraus, dass der Endlichkeitsfaktor bei einer Umkehrung des Strahlungsüberganges seinen Wert nicht ändert, dass also $\gamma_{ik} = \gamma_{ki}$ ist.

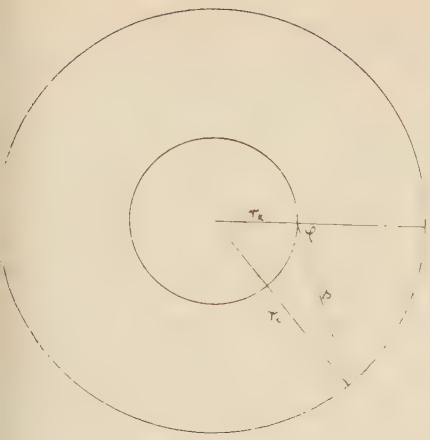


Abb 5

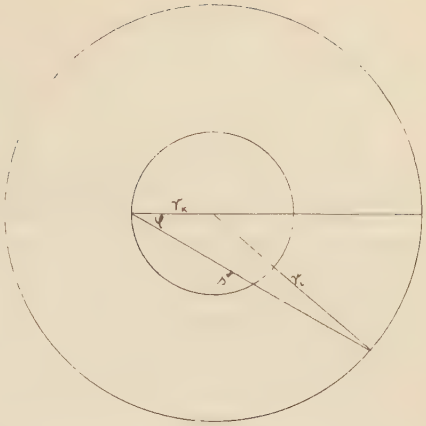


Abb 6

Es bleibt schliesslich noch die Berechnung des Endlichkeitsfaktors φ^*_{ik} der dritten Koeffizientenklasse übrig. Wir betrachten dazu wieder zunächst den Fall, dass die strahlende Elektrode innerhalb der bestrahlten liegt, d.h. dass $k \leq (i-1)$ ist. Die Ermittlung des zugehörigen Faktors φ^*_{ik} lässt sich dann weitgehend auf die soeben behandelte Berechnung des entsprechenden Faktors φ_{ik} der zweiten Klasse zurückführen. In der Abb. 6 ist ein Querschnitt durch die beiden Gitterzylinder mit den Indizes i und k dargestellt. Wiederum werde als Hilfsunbekannte die jetzt mit s^* bezeichnete Entfernung zwischen dem strahlenden Flächenelement $d\sigma$ und den in der gleichen Horizontalebene liegenden Punkten des auffangenden Gitterzylinders eingeführt. s^* ist dann wieder eine Funktion von φ allein, und es behalten ausserdem, wie man bei Betrachtung der Abb.4 leicht einsieht, alle Überlegungen, welche zur Ermittlung von φ_{ik} führten, in dem vorliegenden Falle ihre volle Gültigkeit. Insbesondere ergeben sich für die Wärmeübergangsfunktion und für die Grenzwinkel jetzt genau die gleichen Werte wie vorher, wenn man statt der Hilfsunbekannten s die Hilfsunbekannte s^* benutzt. Infolgedessen erhält man den gesuchten Wert von φ^*_{ik} dadurch, dass man in der Gleichung (49) für φ_{ik} s durch s^* ersetzt.

Um φ^*_{ik} wirklich berechnen zu können, muss jetzt noch die Hilfsunbekannte s^* durch bekannte Grössen ausgedrückt werden. Zu diesem Zweck wird ähnlich wie bei der Ermittlung von s der Cosinussatz auf das in Abb. 6 gezeichnete Schnittdreieck angewandt. Dann ist:

$$r_i^2 = r_k^2 + s^{*2} - 2 r_k s^* \cdot \cos\varphi$$

woraus sich für s^* der Wert:

$$s^*(\varphi) = r_k \cdot \left[\sqrt{\left(\frac{r_i}{r_k}\right)^2 - \sin^2\varphi} + \cos\varphi \right]$$

ergibt.

Setzt man nun diesen Ausdruck für s^* statt der Grösse $s(\varphi)$ in Gleichung (49) ein, so erhält man für den gesuchten Faktor φ^*_{ik} den Wert:

$$\gamma_{ik}^{*} = 1 - \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \cdot \operatorname{arctg}\left[\frac{r_k}{\ell}\left[\sqrt{\left(\frac{r_i}{r_k}\right)^2 - \sin^2\varphi} + \cos\varphi\right]\right] d\varphi \qquad (51)$$

$$k \leqq i-1$$

Diese Beziehung gilt nur für den Fall, dass die strahlende Elektrode innerhalb der bestrahlten liegt ($k \leqq i-1$). In genau der gleichen Weise wie es vorhin für die Koeffizienten γ_{ik} gezeigt worden ist, ergibt sich nun aber mit Hilfe der Symmetriebeziehung, dass auch die Endlichkeitsfaktoren γ_{ik}^{*} ihren Wert nicht ändern, wenn der Strahlungsübergang umgekehrt verläuft. Demnach ist also $\gamma_{ik}^{*} = \gamma_{ki}^{*}$. Infolgedessen ermöglicht die Gleichung (51) bereits die Berechnung sämtlicher Endlichkeitsfaktoren der dritten Klasse mit Ausnahme desjenigen für den Fall k = i. Den hierzu gehörigen Faktor, der sich auf den Strahlungsübergang einer Elektrode auf sich selbst bezieht, erhält man am einfachsten dadurch, dass man in der Gleichung (51) $r_k \longrightarrow r_i$ konvergieren lässt. Nach vollzogenem Grenzübergang wird dann:

$$\gamma_{kk}^{*} = 1 - \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{2r_k}{\ell} \cdot \cos\varphi\right) d\varphi \qquad (52)$$

Mit Hilfe der Beziehungen (50), (51) und (52) lassen sich sämtliche Endlichkeitsfaktoren berechnen. Dabei können die in (50) und (51) auftretenden Integrale nur graphisch ermittelt werden. Das in Gleichung (52) vorkommende Integral liesse sich zwar durch eine Substitution und eine anschliessende Partialbruchzerlegung noch explizit ausrechnen. Da sich jedoch die Koeffizienten der Partialbruchzerlegung als Wurzeln einer kubischen Gleichung ergeben, so ist die graphische Integration weniger umständlich und daher vorzuziehen.

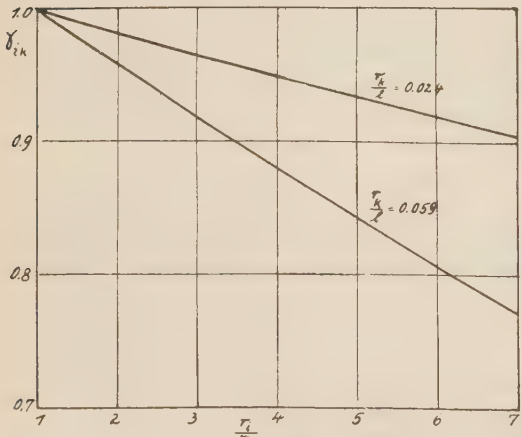


Abb. 7

Was die Grösse der Endlichkeitsfaktoren anbelangt, so sind diese wie aus den angegebenen Gleichungen (50) und (51) ersichtlich, im allgemeinen Fall sowohl vom Durchmesserverhältnis der beiden betrachteten Elektroden als auch vom Verhältnis $\frac{r_k}{\ell}$ des Radius der inneren Elektrode zur Elektrodenlänge abhängig. Dementsprechend sind in den Abb. 7 und 8 die Werte der Endlichkeitsfaktoren γ_{ik} und γ_{ik}^{*} in Abhängigkeit vom Durchmesserverhältnis r_i/r_k ($\frac{r_k}{\ell}$ als Parameter) dargestellt. Abb. 9 zeigt schliesslich für den Sonderfall der Gleichung

52), also für die Strahlung iner Elektrode auf sich elbst, den Endlichkeitsfak- or γ^*_{kk} in Abhängigkeit vom erhältnis $2\,r_k/l$ des Durch- essers zur Länge der betref- enden Elektrode.

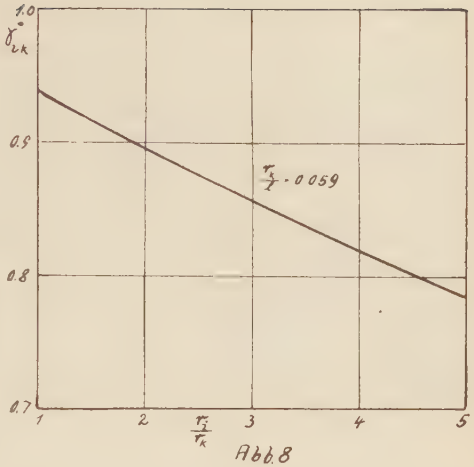


Abb.8

Die zahlenmässige Be- echnung der Endlichkeitsfak- oren liefert den noch fehlen- en dritten zur Bestimmung der oeffizienten des Grundglei- hungssystems erforderlichen aktor, so dass nun diese Koef- izienten durch die Koordinaten nd Abmessungen der Elektroden usgedrückt werden können. So- ald dies geschehen ist, kann as Grundgleichungssystem für ine gegebene Röhre zahlenmäs- ig aufgestellt werden.

Da die angegebenen Koef- izientenformeln streng genom- en nur bei konstanter Elektro- entemperatur gelten, so soll ls Abschluss dieses Paragra- hen noch gezeigt werden, dass ie Formeln auch dann noch gül- ig bleiben, wenn auf der Ober- läche der Kathode grössere emperaturuntersohiede vorhan- en sind. Zu diesem Zweck soll ei einer bestimmten Anordnung er für konstante Temperatur ültige Koeffizient e_{il} mit dem nter Berücksichtigung der Tempe- aturuntersohiede erhaltenen oeffizienten e'_{il} verglichen erden. Bei der hierzu erforder- ichen Untersuchung kann man ich darauf beschränken, den trahlungsübergang von der Ka- hode zu einem unmittelbar be- achbarten Gitterzylinder zu etrachten, da, wie ohne weite-

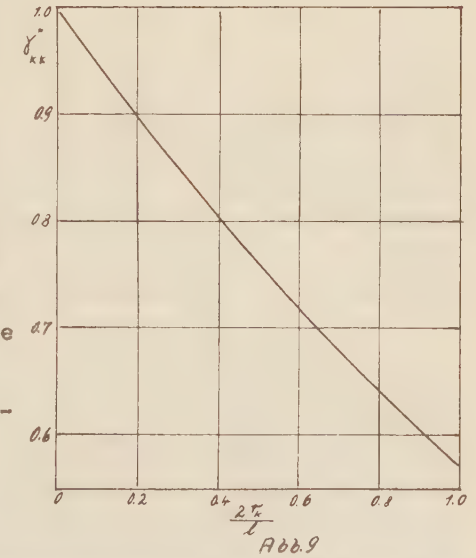


Abb.9

es einzusehen ist, die Temperaturunterschiede nur die Grösse der ndlichkeitsfaktoren beeinflussen können.

Zur Ermitllung von e'_{il} muss zunächst das Restintegral Γ_{il} erechnet werden. Nimmt man zur Vereinfachung an, dass die oben ingeführte Entfernung s als konstant angesehen werden kann (ent- prechend grossem Abstand Kathode-Gitterzylinder, vergl.Abb. 5), so rhält man aus Gleichung (11a) für Γ_{il} die Beziehung:

$$\Gamma_{i_1} = -2\pi r_1 \cdot \left\{ \int_0^{z'} z \cdot \frac{dS(z)}{dz} \left(\pi - 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{z}{r}\right) dz + l \cdot \left[S(z') - S(l) \right] \cdot \left(\pi - 2 \operatorname{arc} \right. \right.$$

Mit Hilfe dieser Formel wurde Γ_{il} für zwei verschiedene
le berechnet, und zwar einmal für 10% und einmal für 25% Differ
zwischen Maximal- und Endtemperatur der Kathode (die praktisch
auftretenden Temperaturuntersohiede überschreiten meist nicht e
nen Wert von etwa 10%). Bei der Berechnung wurde für das Verhä
nis $\frac{s}{l}$ ein verhältnismässig grosser Wert $\left(\frac{s}{l} = 0{,}129;\ s = 0{,}4\ \text{cm},\right.$
$l = 3{,}1$ cm) angenommen, da der Einfluss der Temperaturuntersohi
auf die Koeffizienten mit wachsendem $\frac{s}{l}$ grösser wird. Die zwisch
e_{il} und e_{il}' erhaltene Abweichung wird daher bereits grösser sei
als die Abweichung, die in den meisten praktischen Fällen in Wi
lichkeit vorhanden ist.

Die für die Koeffizienten e_{il} bzw. e_{il}' schliesslich erhal
Werte sind im folgenden zusammengestellt:

Temperaturuntersohiede	e_{il}	e_{il}'	$\frac{T}{T}$
10%	0,918	0,932	0,3 %
25%	0,918	0,953	0,7 %

In der letzten Spalte dieser Aufstellung ist der in Prozenten a
gedrückte Fehler angegeben, den man bei der Berechnung der Elek
dentemperaturen macht, wenn statt der genau gültigen Koeffizien
e_{il} die e_{il} als Nährungswerte benutzt werden (dabei wurde ange
men, dass das Strahlungsgesetz der betreffenden Elektrode den E
ponenten 5 besitzt). Der erhaltene Fehler ist selbst bei den se
grossen Temperaturuntersohieden von 25% nur gering. Man kann da
wie auch schon im § 14 erwähnt wurde, praktisch stets mit den e
facher zu ermittelnden Koeffizienten e_{il} rechnen und darf die R
stintegrale Γ_{il} stets vernachlässigen.

§ 21 Die Wärmeleitungsgleichung für die Gitter

Aus dem zahlenmässig aufgestellten Grundgleichungssystem
nun die Temperaturen der Elektroden zu berechnen. Dabei muss di
von den Elektroden durch die Haltestreben bzw. Stromzuführungen
nach aussen abgeleitete Wärmemenge natürlich berücksichtigt wer
Das Verfahren, nach dem in diesem Fall die Elektrodentemperatur
zu ermitteln sind, wurde bereits im § 11 ganz allgemein angegeb
Die Anwendung des dort geschilderten Verfahrens setzt allerding
voraus, dass die Temperaturbedingung erfüllt ist, d.h. dass die
Temperaturuntersohiede längs der Oberfläche eines jeden der be-
trachteten Körper gering sind. Unter dieser Voraussetzung kann
nämlich den in Wirklichkeit an der Körperoberfläche vorhandenen
stetigen Übergang der Temperatur von einem Höchstwert zu einem
den Verbindungsstellen des betreffenden Körpers mit seiner Halte
rung vorhandenen niedrigsten Wert - der Endtemperatur - durch ei
längs der ganzen Oberfläche konstante mittlere Temperatur erset
Infolgedessen tritt die streng genommen vorhandene Temperaturver
lung in den Überlegungen des § 11 gar nicht auf.

Ganz anders liegen jedoch die Verhältnisse bei der n-Elektro-
lenröhre. Zwar sind auch hier bei der Anode und der (indirekt ge-
heizten) Kathode die Temperaturunterschiede im allgemeinen gering,
jedoch können sie bei den (n - 2) Gittern beträchtliche Werte an-
nehmen. (vergl. § 14) Wollte man auch in diesem Fall, in dem die
Höchsttemperatur sich sehr stark von der Endtemperatur unterschei-
det, die vorhandene Temperaturverteilung durch eine längs des gan-
zen Gitters konstante mittlere Temperatur ersetzen, so würde man
offenbar bei der Bestimmung der abgeleiteten Wärmemenge einen er-
heblichen Fehler machen und infolgedessen für die gesuchte Tempe-
ratur des Gitters einen falschen Wert erhalten. Darüber hinaus
erscheint es aber auch im Hinblick auf die Frage der thermischen
Gitteremission notwendig, den Temperaturverlauf längs des Gitters
festzulegen, da wegen der starken Abhängigkeit der Emission von
der Temperatur schon verhältnismässig geringe Temperaturverschie-
denheiten sehr grosse Unterschiede in der Emission nach sich zie-
hen können. Weil nun, wie erwähnt, die Temperaturverteilung in dem
in § 11 beschriebenen Verfahren überhaupt nicht berücksichtigt wird
so muss für die nunmehr zu behandelnde Berechnung der Gittertempe-
ratur und insbesondere der Temperaturverteilung längs des Gitters
ein besonderes Verfahren entwickelt werden.

Die Grundlage dieses Verfahrens wird offenbar wegen der er-
wähnten Temperaturunterschiede längs des Gitters die Differential-
gleichung der Wärmeleitung für den stationären Zustand bilden müs-
sen. Damit diese Wärmeleitungsgleichung für die Gitter aufgestellt
werden kann, bedarf es einiger Voraussetzungen, welche zunächst
zu behandeln sind.

Alle bisherigen Überlegungen bezogen sich, soweit dabei die
Gitter eine Rolle spielten, auf die idealisierten Gitter, welche
durch den verschwindend kleinen Querschnitt ihrer Bestandteile
(Windungen und Streben) gekennzeichnet sind. Die Voraussetzung ver-
schwindend kleinen Querschnittes kann solange, wie es sich nur um
die Betrachtung des Strahlungsaustausches handelt, bei welchem le-
diglich die Oberfläche eine Rolle spielt, ohne Bedenken gemacht
werden. Für die Untersuchung der Wärmeleitung spielt dagegen die
Grösse des Querschnittes, durch welchen die Wärme abgeleitet wird,
eine ausschlaggebende Rolle. Infolgedessen muss jetzt das bisher
betrachtete idealisierte Gitter durch das zugehörige reale Gitter
ersetzt werden. Der Übergang vom idealisierten zum realen Gitter
kann, da eine strenge Behandlung des Strahlenüberganges für das
reale Gitter nicht möglich ist (vergl. § 14), nur durch die Annahme
erfolgen, dass die gesamte auftreffende Strahlungsenergie in den
beiden Fällen die gleiche Grösse besitzt. Diese Annahme erscheint
einleuchtend, weil bei der Einführung des idealisierten Gitters
dessen Strahlungseigenschaften denen des realen Gitters weitest-
gehend angepasst wurden. Ein einwandfreier Beweis für die Richtig-
keit dieser Annahme kann allerdings auf theoretischem Wege nicht
erbracht werden. Dies muss vielmehr dem Experiment überlassen blei-
ben, über welches Einzelheiten weiter unten angegeben werden sol-
len.

Die Untersuchung der Wärmeleitung bei den Gittern wird wesent-
lich vereinfacht, wenn man die besonderen Eigenschaften der in
technischen Röhren verwendeten Gitter berücksichtigt. Bei diesen
ist nämlich der Querschnitt der Streben stets gross gegenüber dem
Querschnitt des Wickeldrahtes. Infolgedessen wird die Ableitung

der Wärme nach aussen zum allergrössten Teil durch die Streben
folgen. Die einzelne Windung spielt für den Wärmefluss, der von
anderen Windungen herrührt, eine vollkommen untergeordnete Rolle
und ist nur für das Abfliessen der ihr selbst zugeführten Energie
von Bedeutung. Man kann daher, ohne einen nennenswerten Fehler
machen, die Untersuchung der Wärmeleitung auf die Gitterstreben
beschränken, indem man die gesamte dem Gitter zugeführte Energie
den Streben zuordnet und annimmt, dass diese Energie allein durch
Streben abfliesst. Allerdings wird man bei einem solchen Vorgehen
als Ergebnis der Rechnung unmittelbar nur die Temperatur der Stre
ben und nicht die der Windungen erhalten. Da jedoch nach dem soeben
Gesagten der durch eine Windung fliessende Wärmestrom gering ist,
so kann man erwarten, dass die Temperatur längs einer ganzen Win
dung fast die gleiche ist wie die der Streben an der Stelle, an
welcher die betreffende Windung mit ihnen verschweisst ist. Diese
zu erwartende Übereinstimmung zwischen Streben und Windungstempe
ratur lässt sich denn auch, wie im nächsten Teil dieser Arbeit ge
zeigt wird, experimentell nachweisen. Wenn daher im folgenden der
Einfachheit halber die Berechnung der Gittertemperatur nur für die
Streben durchgeführt wird, so bedeutet das keine Beschränkung der
Allgemeinheit des Verfahrens; die an und für sich für die Streben
erhaltenen Temperaturwerte sind vielmehr auch für die Windungen
des Gitters gültig.

Eine weitere Vereinfachung der aufzustellenden Differential
gleichung ergibt sich daraus, dass wie stets bei der Untersuchung
der Wärmeleitung von Drähten, auch hier bei den Gitterstreben die
Temperaturverschiedenheiten innerhalb eines Querschnittes vernach
lässigt werden können. Dadurch wird das Wärmeleitungsproblem line
ar. Die Temperatur T_k des Gitters mit dem Index k ist also einzig
und allein eine Funktion der mit der Längsrichtung der Streben zu
sammenfallenden Koordinate. Wird diese Koordinate mit x bezeichnet
so ist also:

$$T_k = T_k(x)$$

Da der durch die Wärmeleitungsgleichung zu beschreibende Vorgang
stationär ist, so ergibt sich als Differentialgleichung die Bezie
hung:

$$\frac{d^2 T_k(x)}{dx^2} = \frac{w_k}{\lambda_k} \qquad (53)$$

Hierin ist λ_k das Wärmeleitvermögen der Streben des Gitters und
w_k die in der Volumeneinheit dieser Streben in der Zeiteinheit er
zeugte Wärmemenge. Diese ist zur Aufstellung der für den vorliege
den Fall geltenden Wärmeleitungsgleichung zunächst zu ermitteln,
und zwar ergibt sie sich als Differenz aus der zugeführten und de
wieder ausgestrahlten Energie. Wird die erste mit $w_k^{(z)}$, die zwei
te mit $w_k^{(a)}$ bezeichnet, so wird die im Gitter erzeugte Wärmemeng
also:

$$w_k = w_k^{(z)} - w_k^{(a)} \qquad (54)$$

Die dem Gitter pro Volumen- und Zeiteinheit zugeführte Ener
gie $w_k^{(z)}$ muss mit Hilfe des Grundgleichungssystems bestimmt wer
den. Die Lösung dieses Gleichungssystems liefert allerdings für d
zugeführte Energie nur den Gesamtwert, weil zur Aufstellung der
Gleichungen von sämtlichen betrachteten Energien die Gesamtwerte
benützt wurden. Dividiert man den so gefundenen Gesamtwert durch

as Volumen der Gitterstreben, so erhält man die der Volumeneinheit es Gitters im Mittel zugeführte Energie. Die Übertragung dieses ittelwertes auf die Wärmeleitungsgleichung ist allerdings streng enommen nicht ganz berechtigt. In Wirklichkeit wird nämlich die ugeführte Energie nicht für alle Gitterpunkte die gleiche sein, ondern von der Koordinate x abhängen. Infolgedessen müsste diese nergie für jeden Wert von x gesondert bestimmt werden. Der Versuch, ine solche Bestimmung durchzuführen, erscheint jedoch als so gut ie aussichtslos, wenn man bedenkt, dass bereits zur zahlenmässigen ufstellung des Grundgleichungssystems und damit zur Ermittlung es Gesamtwertes der zugeführten Energie die zahlreichen in den orhergehenden Paragraphen geschilderten Überlegungen und Rechnun- en notwendig waren. Infolgedessen wird man sich damit begnügen issen, der weiteren Berechnung den bereits erwähnten, für alle itterpunkte gleichen Mittelwert der zugeführten Energie zugrunde l legen. Es wird weiter unten gezeigt werden, dass der durch die enutzung dieses Mittelwertes entstehende Fehler so gering ist, dass r vernachlässigt werden kann.

Wird der Gesamwert der zugeführten Energie mit H_k bezeichnet - uf die Ermittlung dieses Wertes aus dem Grundgleichungssystem wer- en wir im nächsten Paragraphen zu sprechen kommen - so ist also:

$$w_k^{(z)} = \frac{H_k}{m_k \cdot l \, \pi \left(\frac{\delta_k'}{2}\right)^2} \qquad (55)$$

obei m_k die Anzahl, l die Länge und δ_k' den Durchmesser der Stre- en des Gitters mit dem Index k bedeuten.

Die pro Volumen und Zeiteinheit ausgestrahlte Energie $w_k^{(a)}$ rgibt sich aus dem Ausstrahlungsgesetz (1), und zwar wird:

$$w_k^{(a)} = \frac{O_k^{(r)} \cdot \varphi_k(T_k)}{m_k \cdot l \cdot \pi \left(\frac{\delta_k}{2}\right)^2} \qquad (56)$$

enn mit $O_k^{(r)}$ die Oberfläche des realen Gitters mit dem Index k ezeichnet wird. Diese lässt sich durch die bekannten Abmessungen es betreffenden Gitters ausdrücken, und zwar wird bei Verwendung er in § 18 angegebenen Bezeichnungen:

$$O_k^{(r)} = 2\pi l \left[\pi r_k \cdot \frac{\delta_k}{\varepsilon_k} + m_k \cdot \frac{\delta_k'}{2}\left(1 - \frac{\delta_k}{\varepsilon_k}\right) \right] \qquad (57)$$

ie weiterhin noch in dem Ausdruck (56) vorkommende Funktion φ_k T_k) stellt die von der Flächeneinheit des Gitters ausgestrahlte esamtenergie dar. Da diese bekanntlich als eine Potenz der abso- uten Temperatur angesetzt werden kann, so wird:

$$\varphi_k(T_k) = \gamma_k \cdot T_k^{\varepsilon_k} \qquad (58)$$

ierin sind γ_k und ε_k als bekannt vorauszusetzen.

Werden die durch die Gleichungen (55) und (56) gegebenen Aus- rücke für die zugeführte und ausgestrahlte Energie $w_k^{(z)}$, bzw. $_k^{(a)}$ in Gleichung (54) eingesetzt und wird dabei die Gleichung 58) berücksichtigt, so ergibt sich für die pro Volumen und Zeit- inheit im Gitter erzeugte Wärmemenge der Ausdruck:

$$w_k = \frac{H_k - O_k^{(T)} \cdot \gamma_k T_k^{\xi_k}}{m_k \cdot l \cdot \pi \left(\frac{\sigma_k}{2}\right)^2} \qquad (59)$$

Unter Benutzung dieses Ausdruckes für w nimmt schliesslich die Wärmeleitungsgleichung (53) die Form:

$$\frac{d^2 T_k(x)}{dx^2} = \frac{1}{l \cdot b_k} \left[O_k^{(T)} \cdot \gamma_k T_k^{\xi_k} - H_k \right] \qquad (60)$$

an, wenn zur Abkürzung

$$\lambda_k \cdot m_k \cdot \pi \left(\frac{\sigma_k}{2}\right)^2 = b_k \qquad (61)$$

gesetzt wird. Die Lösung der Differentialgleichung (60) wird die gesuchten Gittertemperaturen liefern. Bevor jedoch das Verfahren geschildert wird, welches die Lösung dieser Gleichung ermöglicht muss noch auf die Ermittlung der dem Gitter zugeführten Gesamtenergie H_k näher eingegangen werden.

§ 22 Die Ermittlung der einem Gitter insgesamt zugeführten Energ

Die dem Gitter insgesamt zugeführte Energie H_k besteht aus der von aussen zugeführten Energie W_k und dem Teil $a_k \cdot A_k$, der von der auf das Gitter auftreffenden Strahlung A_k absorbiert wir Demnach ist:

$$H_k = W_k + a_k A_k \qquad 62$$

Zur Ermittlung dieser Energie muss die Lösung des Grundgleichung systems benutzt werden. Diese liefert allerdings unmittelbar nur die von den Elektroden ausgestrahlten Energien E_i, darunter natürlich auch die Ausstrahlung E_k des betrachteten Gitters. Mit Hilf der Energiebilanz (2), nach welcher die dem Gitter zugeführte Energie gleich der von ihm abgegebenen ist, ist es aber ohne weiters möglich, eine Beziehung zwischen der Ausstrahlung E_k und de insgesamt zugeführten Energie H_k herzustellen. Setzt man nämlich die Definitionsgleichung (62) für H_k in die Energiebilanz (2) ei und berücksichtigt noch, dass die Gesamtausstrahlung des Gitters den Wert 2 E_k besitzt (statt E_k in Teil A, vergl. § 14), so erhä man die gesuchte Beziehung zwischen H_k und E_k zu:

$$H_k = 2 E_k + Q_k \qquad (63)$$

Dadurch ist die gesamte zugeführte Energie auf die Ausstrahlung 2 E_k des betrachteten Gitters zurückgeführt. Da diese Ausstrahlu sich aus der Lösung des Grundgleichungssystems ergibt, muss nun weiterhin auf diese Lösung näher eingegangen werden.

Die Auflösung eines Systems von linearen Gleichungen, wie es das Grundgleichungssystem darstellt, erfolgt bekanntlich nach der Cramerschen Regel der Determinantentheorie. Dazu ist zuerst das Grundgleichungssystem (29) in der Normalform, in welcher die (3 n - 2) Unbekannten auf der linken und die absoluten Glieder auf der rechten Seite stehen, hinzuschreiben. Es ist dann:

$$\ell_{i1} E_1 + \sum_{k=2}^{i-1} (\ell_{ik} + \ell_{ik}^*) E_k + (\ell_{ii}^* - \frac{\varepsilon_i}{a_i}) E_i + \sum_{k=i+1}^{n} (\ell_{ik} + \ell_{ik}^*) E_k + \sum_{k=2}^{i-1} \ell_{ik}^* E_k^{(ri)}$$

$$+ \ell_{ii}^* E_i^{(ri)} + \sum_{k=i+1}^{n} (\ell_{ik} + \ell_{ik}^*) E_k^{(ri)} + \sum_{k=1}^{i-1} \ell_{ik} E_k^{(ra)} = - \frac{V_i}{a_i}$$

$i = 1 \ldots\ldots n$

$$\ell_{i1} E_1 + \sum_{k=2}^{i-1} (\ell_{ik} + \ell_{ik}^*) E_k + \ell_{ii}^* E_i + \sum_{k=i+1}^{n} \ell_{ik}^* E_k + \sum_{k=2}^{i-1} \ell_{ik}^* E_k^{(ri)}$$

$$+ (\ell_{ii}^* - \frac{1}{\delta_i}) E_i^{(ri)} + \sum_{k=i+1}^{n} \ell_{ik}^* E_k^{(ri)} + \sum_{k=1}^{i-1} \ell_{ik} E_k^{(ra)} = 0$$

$i = 2 \ldots\ldots n$

$$\sum_{k=i+1}^{n} \ell_{ik} E_k + \sum_{k=i+1}^{n} \ell_{ik} E_k^{(ri)} - \frac{1}{\delta_i} \cdot E_i^{(ra)} = 0$$

$i = 1 \ldots\ldots (n-1)$

$\varepsilon_1 = 1 \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \ldots\ldots = \varepsilon_n = 2 \qquad \ell_{11} = 0$

$\ell_{1k}^* = 0$

Aus diesem Gleichungssystem ist weiterhin die Systemdeterminante $\mathcal{D}$ zu bilden, welche aus den Koeffizienten sämtlicher Unbekannten besteht. Diese lautet:

$\mathcal{N} =$ (64)

E_1	E_2	E_3	E_4			E_n	$E_2^{(ri)}$	$E_3^{(ri)}$	$E_4^{(ri)}$			$E_n^{(ri)}$	$E_1^{(ra)}$	$E_2^{(ra)}$	$E_3^{(ra)}$			$E_{n-1}^{(ra)}$	
$-\frac{1}{a_1}$	e_{12}	e_{13}	e_{14}	.	.	e_{1n}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	.	.	e_{1n}	0	0	0	.	.	0	(a, 1)
e_{21}	$e^*_{22}-\frac{2}{a_2}$	$e_{23}+e^*_{23}$	$e_{24}+e^*_{24}$	.	.	$e_{2n}+e^*_{2n}$	e^*_{22}	$e_{23}+e^*_{23}$	$e_{24}+e^*_{24}$	.	.	$e_{2n}+e^*_{2n}$	e_{21}	0	0	.	.	0	(a, 2)
e_{31}	$e_{32}+e^*_{32}$	$e^*_{33}-\frac{2}{a_3}$	$e_{34}+e^*_{34}$	.	.	$e_{3n}+e^*_{3n}$	e^*_{32}	e^*_{33}	$e_{34}+e^*_{34}$	.	.	$e_{3n}+e^*_{3n}$	e_{31}	e_{32}	0	.	.	0	(a, 3)
e_{41}	$e_{42}+e^*_{42}$	$e_{43}+e^*_{43}$	$e^*_{44}-\frac{2}{a_4}$	.	.	$e_{4n}+e^*_{4n}$	e^*_{42}	e^*_{43}	e^*_{44}	.	.	$e_{4n}+e^*_{4n}$	e_{41}	e_{42}	e_{43}	.	.	0	(a, 4)
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
e_{n1}	$e_{n2}+e^*_{n2}$	$e_{n3}+e^*_{n3}$	$e_{n4}+e^*_{n4}$	.	.	$e^*_{nn}-\frac{2}{a_n}$	e^*_{n2}	e^*_{n3}	e^*_{n4}	.	.	e^*_{nn}	e_{n1}	e_{n2}	e_{n3}	.	.	$e_{n,n-1}$	(a, n)
e_{21}	e^*_{22}	e^*_{23}	e^*_{24}	.	.	e^*_{2n}	$e^*_{22}-\frac{1}{\beta_2}$	e^*_{23}	e^*_{24}	.	.	e^*_{2n}	e_{21}	0	0	.	.	0	(b, 2)
e_{31}	$e_{32}+e^*_{32}$	e^*_{33}	e^*_{34}	.	.	e^*_{3n}	e^*_{32}	$e^*_{33}-\frac{1}{\beta_3}$	e^*_{34}	.	.	e^*_{3n}	e_{31}	e_{32}	0	.	.	0	(b, 3)
e_{41}	$e_{42}+e^*_{42}$	$e_{43}+e^*_{43}$	e^*_{44}	.	.	e^*_{4n}	e^*_{42}	e^*_{43}	$e^*_{44}-\frac{1}{\beta_4}$	.	.	e^*_{4n}	e_{41}	e_{42}	e_{43}	.	.	0	(b, 4)
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
e_{n1}	$e_{n2}+e^*_{n2}$	$e_{n3}+e^*_{n3}$	$e_{n4}+e^*_{n4}$	.	.	e^*_{nn}	e^*_{n2}	e^*_{n3}	e^*_{n4}	.	.	$e^*_{nn}-\frac{1}{\beta_n}$	e_{n1}	e_{n2}	e_{n3}	.	.	$e_{n,n-1}$	(b, n)
0	e_{12}	e_{13}	e_{14}	.	.	e_{1n}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	.	.	e_{1n}	$-\frac{1}{\beta_1}$	0	0	.	.	0	(c, 1)
0	0	e_{23}	e_{24}	.	.	e_{2n}	0	e_{23}	e_{24}	.	.	e_{2n}	0	$-\frac{1}{\beta_2}$	0	.	.	0	(c, 2)
0	0	0	e_{34}	.	.	e_{3n}	0	0	e_{34}	.	.	e_{3n}	0	0	$-\frac{1}{\beta_3}$	.	.	0	(c, 3)
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
0	0	0	0	.	.	$e_{n-1,n}$	0	0	0	.	.	$e_{n-1,n}$	0	0	0	.	.	$-\frac{1}{\beta_{n-1}}$	(c, n-1)

m das Gesetz, nach welchem diese Determinante gebildet ist, zum usdruck zu bringen, ist über jeder Spalte der Determinante diejenige Unbekannte hingeschrieben worden, zu welcher die Elemente er betreffenden Spalten im Grundgleichungssystem gehören. Aus dem leichen Grunde wurden die Zeilen - am rechten Rand der Determiante - entsprechend ihrer Zugehörigkeit zu den einzelnen Gleichungen des Grundgleichungssystems numeriert.

Weiterhin sind nun zur Berechnung der beliebig herausgegriffenen Unbekannten E_i des Grundgleichungssystems alle Elemente der i-ten Spalte der Systemdeterminante $\mathcal{H}$ durch die auf der rechten Seite des Grundgleichungssystems stehenden zugehörigen absoluten Glieder, d.h. durch die Elemente der Zahlenreihe $\frac{V_1}{a_1}, \frac{V_2}{a_2} \ldots\ldots \frac{V_n}{a_n}$,),O ..... O zu ersetzen. Dadurch wird eine zweite Determinante erhalten, welche mit Z_i bezeichnet werden soll. Die gesuchte unbekannte Ausstrahlung E_i ergibt sich schliesslich als Quotient der beiden so gebildeten Determinanten in der Form:

$$E_i = \frac{Z_i}{\mathcal{H}} \qquad (65)$$

Um die in dieser Gleichung enthaltene Abhängigkeit der Ausstrahlung E_i von den Hilfsenergien V_ν deutlich zum Ausdruck zu bringen, wird die Zählerdeterminante Z_i nach den Elementen der i-ten Spalte, d.h. nach den durch das Absorptionsvermögen a_ν dividierten V_ν entwickelt. Dann wird:

$$Z_i = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{u_{i\nu}}{a_\nu} \cdot V_\nu \qquad (66)$$

worin $u_{i\nu}$ diejenige Unterdeterminante ist, welche aus der Zählerdeterminante Z_i dadurch entsteht, dass die i-te Spalte und die ν-te Zeile fortgelassen werden. Die Zählerdeterminante ergibt sich also als lineare Funktion der Hilfsenergien V_ν. Ebenso wird, wenn man (66) in (65) einsetzt, auch die Ausstrahlung E_i von den V_ν linear abhängig, und zwar wird:

$$E_i = \frac{1}{\mathcal{H}} \cdot \sum_{\nu=1}^{n} \frac{u_{i\nu}}{a_\nu} \cdot V_\nu \qquad (67)$$

$$i = 1 \ldots\ldots n$$

Die in dieser Beziehung enthaltenen Determinanten $\mathcal{H}$ und $u_{i\nu}$ lassen sich aus den Koeffizienten des Grundgleichungssystems berechnen. Dabei ist die Systemdeterminante $\mathcal{H}$ unmittelbar durch (64) gegeben. Die Determinanten $u_{i\nu}$ sind dagegen zunächst als Unterdeterminanten der Zählerdeterminante Z_i definiert worden. Da jede der Determinanten Z_i sich jedoch von $\mathcal{H}$ nur in der i-ten Spalte unterscheidet, diese Spalte aber bei der Bildung der $u_{i\nu}$ fortgelassen wird, so werden die $u_{i\nu}$ am einfachsten ebenfalls aus (64) dadurch erhalten, dass in dieser Determinante die i-te Spalte und die ν-te Zeile gestrichen werden.

Durch die Gleichung (67) ist also die Ausstrahlung E_i mit Hilfe von lauter berechenbaren Werten als Funktion der Hilfsenergien V_ν dargestellt worden. Die so gefundene Beziehung soll je-

doch noch nicht zur Ermittlung der zugeführten Energie H_k aus Gl chung (63) benutzt werden, da sie mit Rücksicht auf die praktisc Anwendung des Verfahrens zweckmässigerweise noch etwas umgeformt wird.

Bei der Berechnung der Gittertemperatur geht man nämlich, bereits in § 13 erwähnt wurde, im allgemeinen von einer bekannte Kathodentemperatur T_1 aus. Infolgedessen ist es zweckmässig, das Verfahren so zu gestalten, dass die Gittertemperatur für jeden b liebigen Wert dieser Kathodentemperatur ermittelt werden kann. D andererseits die bisher aufgestellten Gleichungen nur Energiegrö sen enthalten, so wird man es allerdings vermeiden, die Kathoden temperatur T_1 selbst in die Gleichungen hineinzubringen. Statt i rer benutzt man daher am besten die von der Kathode ausgestrahlt Energie E_1, die aus T_1 mit Hilfe des Ausstrahlungsgesetzes (1) u mittelbar berechnet werden kann.

Entsprechend diesen Überlegungen muss also zunächst die Ge samtausstrahlung $2\,E_k$ des betrachteten Gitters in Abhängigkeit v der Ausstrahlung E_1 der Kathode dargestellt werden. Zu diesem Zw wird die Gleichung (67) sowohl für i = k als auch für i = 1 aufg stellt.

Aus den beiden so erhaltenen Beziehungen wird dann die Hil energie V_1 eliminiert. Dadurch wird eine Gleichung erhalten, wel che die Ausstrahlung $2\,E_k$ des Gitters mit dem Index k in Abhängi keit von der Ausstrahlung E_1 der Kathode liefert und welche unte Berücksichtigung der Definitionsgleichung (25) für die Hilfsener gien V_i die Form

$$2\,E_k = 2\,\frac{\ddot{u}_{k1}}{\ddot{u}_{11}}\cdot E_1 + \sum_{\nu=2}^{n} h_{k\nu}\left(W_\nu - Q_\nu\right) \qquad (68$$

annimmt. Die auf diese Weise gewonnene Gleichung besitzt den gro sen Vorteil, dass die unbekannte, der Kathode durch Wärmeleitung verloren gehende, Energie Q_1 in ihr nicht mehr enthalten ist. Das in dieser Gleichung vorkommende Glied $h_{k\nu}$ ist ein als bekannt an zusehender Faktor, der sich aus den Determinanten $u_{i\nu}$ und $\mathcal{N}$ z

ergibt.

$$h_{k\nu} = 2\cdot\frac{\ddot{u}_{11}\,\ddot{u}_{k\nu} - \ddot{u}_{1\nu}\,\ddot{u}_{k1}}{a_\nu\cdot\mathcal{N}\,\ddot{u}_{11}} \qquad (69)$$

Aus der Gleichung (68) wird nun schliesslich die gesuchte dem betrachteten Gitter insgesamt zugeführte Energie H_k - ebenfa in Abhängigkeit von der Ausstrahlung E_1 der Kathode - dadurch e halten, dass auf beiden Seiten das Wärmeleitungsglied Q_k addiert wird. Dann wird nach Gleichung (63):

$$H_k = 2\,E_k + Q_k = 2\,\frac{\ddot{u}_{k1}}{\ddot{u}_{11}}\cdot E_1 + \sum_{\nu=2}^{n} h_{k\nu}\,W_\nu$$

$$-\sum_{\nu=2}^{k-1} h_{k\nu}\,Q_\nu - \sum_{\nu=k+1}^{n} h_{k\nu}\,Q_\nu - \left(h_{kk}-1\right)Q_k \qquad (70)$$

Aus dieser Gleichung liesse sich die Energie H_k ermitteln, wenn nicht auf der rechten Seite die unbekannten Wärmeleitungsglieder Q_v (v = 2..n) stehen würden. Da eine Eliminierung dieser Glieder mathematisch nicht möglich ist, so bleibt nichts anderes übrig, als dass man sie vorerst fortlässt. Infolgedessen ist weiterhin zunächst der Fehler zu ermitteln, der bei der Berechnung der Energie H_k entsteht, wenn die genannten Glieder Q_v vernachlässigt werden.

Für diese Untersuchung ist es wesentlich, dass das Glied Q_k auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens in Gleichung (70) auftritt. Auf der linken Seite (als Summand von $2E_k$) stellt es den direkten Einfluss der Wärmeleitung dar. Infolge der Wärmeleitung wird nämlich dem Gitter in der Zeiteinheit die Energiemenge Q_k entzogen, so dass nicht die gesamte zugeführte Energie H_k zur Ausstrahlung gelangt, sondern nur der um Q_k verminderte Betrag $2 E_k$ dieser Energie. Dementsprechend wird auch die Temperatur des Gitters verringert.

Im Gegensatz hierzu kennzeichnet der auf der rechten Seite der Gleichung (70) vorkommende Ausdruck $(h_{kk} - 1) Q_k$ gewissermassen den indirekten Einfluss der Wärmeleitung auf die Gittertemperatur, der sich aus den durch die Wärmeleitung geänderten Strahlungsverhältnissen ergibt. Wegen des vorher beschriebenen direkten Einflusses der Wärmeleitung strahlt nämlich das betreffende Gitter weniger Energie aus als bei fehlender Wärmeleitung; infolgedessen wird den übrigen Elektroden entsprechend weniger Strahlung zugeführt, so dass auch die von diesen Elektroden auf das betrachtete Gitter zurückgestrahlte Energiemenge kleiner wird. Diese verminderte Zustrahlung bewirkt eine weitere Verminderung der Gittertemperatur über die durch den direkten Einfluss der Wärmeleitung verursachte Temperaturerniedrigung hinaus.

Natürlich wird infolge dieser weiteren Temperaturerniedrigung auch der direkte Einfluss der Wärmeleitung ein anderer, als wenn der indirekte Einfluss nicht vorhanden wäre, und so fort. Als Ergebnis des Zusammenwirkens dieser beiden Einflüsse muss sich aber jedenfalls ein Gleichgewichtszustand einstellen, und eben dieser Gleichgewichtszustand wird durch die Gleichung (70) beschrieben.

Man erkennt aus diesen Überlegungen, dass der direkte Einfluss der Wärmeleitung sehr gross sein kann. Man wird aber vermuten, dass der durch das Glied $(h_{kk} - 1) Q_k$ dargestellte indirekte Einfluss der Wärmeleitung gering sein wird, gleichgültig, ob der direkte Einfluss gross ist oder nicht. In jedem Fall sind nämlich wegen der verhältnismässig kleinen Oberfläche der Gitter und wegen der im Vergleich zur Kathodentemperatur verhältnismässig niedrigen Gittertemperatur die von den Gittern ausgestrahlten Energien sicher klein gegenüber der von der Kathode ausgestrahlten Energie. Infolgedessen wird die durch die Wärmeleitung bewirkte Verringerung der von den Gittern ausgestrahlten Energien die Strahlungsverhältnisse des gesamten Elektrodensystems und damit auch die dem betrachteten Gitter zugestrahlte Energie nur wenig beeinflussen, d.h. aber, dass der indirekte Einfluss der von den Gittern abgeleiteten Wärmemengen auf die Gittertemperatur gering sein wird.

In der Tat ergibt die Durchrechnung von technisch verwende
ten Röhren, dass bei diesen der Faktor h_{kk} stets nur wenig grösse
ist als 1, und dass daher das unbekannte Glied $(h_{kk} - 1)\, Q_k$ auf
rechten Seite der Gleichung (70) stets klein gegenüber den darin
vorkommenden bekannten Gliedern ist 6). Der Fehler, der durch di
Fortlassung dieses Gliedes bei der Berechnung von H_k entsteht, wi
daher nicht sehr gross sein, so dass der so erhaltene Wert von H_k
eine gute Näherung des richtigen Wertes darstellt. Es sei noch
einmal darauf hingewiesen, dass durch diese Näherung der unter Um
ständen sehr beträchtliche direkte Einfluss der Wärmeleitung na-
türlich in keiner Weise vernachlässigt wird, dieser ist vielmehr
nach wie vor mit seiner vollen Grösse in Gleichung (70) enthalten

Das gleiche, was soeben für das Gitter mit dem Index k abge
leitet wurde, muss offenbar auch für alle übrigen Gitter gelten.
Es wird also bei jedem beliebigen Gitter die Wärmeableitung desse
eigene Temperatur zwar ganz erheblich beeinflussen, jedoch wird
der Einfluss der verminderten Gittertemperatur auf die Temperatur
der übrigen Elektroden verhältnismässig gering sein. Infolgedesse
werden in erster Näherung sämtliche auf der rechten Seite der Gle
chung (70) vorkommenden Wärmeleitungsglieder, welche sich auf die
Gitter beziehen, d.h. die Glieder Q_2, Q_3 ....Q_n-1, vernachlässigt
werden können.

Das dann noch auf der rechten Seite von (70) übrig bleiben-
de Wärmungsglied Q_n stellt die von der Anode abgeleitete Wärme-
menge dar. Da nun bei normaler Halterung der Anode die durch Wär-
meleitung verloren gehende Energie, wie bereits festgestellt wor-
den ist, nur einen geringen Betrag der gesamten der Anode zuge-
führten Energie ausmacht, so kann das Glied Q_n in erster Näherung
ganz sicher vernachlässigt werden.

Durch die soeben angegebenen Vernachlässigungen wird die zu
geführte Energie H_k eine Funktion von lauter bekannten Grössen,
nämlich von der Kathodenausstrahlung E_1 und den Energien W_2, W_3,
.....W_n, welche den übrigen Elektroden von aussen zugeführt wer-
den. Man erhält also dadurch für die gesuchte Funktion $H_k\,(E_1)$ ei
nen Näherungswert, der mit $H_k^{(1)}$ bezeichnet werden soll, und zwar
ist:

$$H_k^{(1)}(E_1) = 2\,E_k^{(1)} + Q_k^{(1)} - 2\,\frac{\ddot{a}_{k1}}{\ddot{a}_{11}}\cdot E_1 + \sum_{\nu=2}^{n} \ddot{a}_{k\nu}\, W_\nu \qquad (71)$$

Es wird später gezeigt werden, wie mit Hilfe der unter Benutzung
dieses Näherungswertes $H_k^{(1)}\,(E_1)$ ermittelten Gittertemperatur der
Einfluss der im vorhergehenden vernachlässigten Wärmeleitungsglie
der Q_ν berücksichtigt werden kann. Dadurch werden dann sowohl für
die zugeführte Energie H_k wie auch für die daraus zu berechnende
Gittertemperatur weitergehende Näherungen erhalten werden.

---

6) vergl. Tabelle V, S.95

Zunächst ist nun der gefundene erste Näherungswert $H_k^{(1)}$ (E_1) der zugeführten Energie in die Wärmeleitungsgleichung (60) einzusetzen. Die Auflösung dieser Diffrentialgleichung wird dann die gesuchte Gittertemperatur - ebenfalls in erster Näherung - liefern. Bevor jedoch die Lösung der Wärmeleitungsgleichung behandelt wird, soll als Abschluss der Untersuchung über den Einfluss der Wärmeleitung der Gitter noch einmal auf die damit zusammenhängende Frage nach der Erfüllung der beiden Grundbedingungen des Verfahrens, die vorher noch nicht restlos geklärt werden konnte (vergl. § 14), eingegangen werden.

Bei der Untersuchung der Anwendbarkeit des Verfahrens auf die -Elektrodenröhre musste zur Erfüllung der beiden Grundbedingungen, die eine nahezu konstante Temperatur und einen nahezu konstanten Temperaturgradienten längs der Elektrodenoberfläche fordern, eine nahezu konstante Gittertemperatur vorausgesetzt werden. Der damals nicht zu erbringende Beweis, dass die Anwendbarkeit des Verfahrens durch die in einem wärmeleitenden Gitter vorhandenen grösseren Temperaturunterschiede nicht eingeschränkt wird, soll an dieser Stelle nachgeholt werden.

Infolge der Temperaturunterschiede werden zwar die beiden Grundbedingungen tatsächlich nicht mehr erfüllt sein. Andererseits zeigen aber die obigen Ausführungen über die Wärmeleitungsglieder, dass der Einfluss dieser Temperaturunterschiede auf die Strahlungsverhältnisse des gesamten Elektrodensystems trotzdem nur gering ist. Infolgedessen wird auch die Störung, welche durch die Nichterfüllung der beiden Grundbedingungen hervorgerufen wird, ebenfalls nur gering sein, so dass das allgemeine Verfahren trotzdem angewandt werden kann, ohne dass bei der Berechnung der Elektrodentemperaturen ein wesentlicher Fehler entsteht.

§ 23 Die Integration der Wärmeleitungsgleichung

Im folgenden soll nun das Verfahren geschildert werden, mittels dessen die gesuchte Temperaturverteilung längs des Gitters aus der Wärmeleitungsgleichung (60) bestimmt werden kann. Offenbar wird diese Verteilung sehr stark von der Art und Weise abhängen, in welcher die Wärme vom Gitter abgeleitet wird. Man wird z.B.ganz verschiedene Temperaturverteilungen zu erwarten haben, je nachdem ob die Wärmeableitung nur an einem Gitterende oder aber an beiden Enden des Gitters erfolgt. Die Herleitung des benutzten Verfahrens lässt sich nun durch gewisse Spezialisierungen der im allgemeinsten Falle vorliegenden Verhältnisse wesentlich vereinfachen. Infolgedessen soll zunächst noch kurz auf die in den verschiedenen Fällen zu erwartende Temperaturverteilung längs des Gitters eingegangen werden.

Der allgemeinste Fall ist offenbar derjenige, in welchem das Gitter an den beiden Enden gehaltert ist und verschieden grosse Wärmemengen über diese beiden Enden nach aussen abfliessen. Die Temperaturverteilung längs des Gitters wird in diesem Falle unsymmetrisch sein, und der Maximalwert der Temperatur wird an einer von vornherein nicht näher anzugebenden Stelle des Gitters, jedenfalls nicht an einem der Enden, liegen. Wesentlich übersichtlichere Temperaturverhältnisse werden dagegen vorhanden sein, wenn die Wärmeableitung nur an einem Ende erfolgt, sei es deswegen, weil das Gitter nur an diesem Ende gehaltert wird oder aber deswegen, weil es am anderen Ende mit einem Material von sehr geringer Wärme-

leitfähigkeit in Verbindung steht. In diesem Falle muss offenbar der Maximalwert der Temperatur an dem freien, Wärme nicht ableitenden Ende, also an einer genau festgelegten Stelle des Gitters liegen. Mit Rücksicht auf die dadurch sich ergebende Vereinfachung der Rechnung soll daher zunächst der zuletzt genannte Fall betrachtet werden, damit der Gedankengang des zu schildernden Verfahrens möglichst klar herausgestellt werden kann. Im Anschluss daran wird dann gezeigt werden, wie sich das entwickelte Verfahren auch zur Untersuchung des zuerst genannten allgemeinen Falles, bei welchem die Ableitung der Wärme an beiden Gitterenden erfolgt, benutzen lässt.

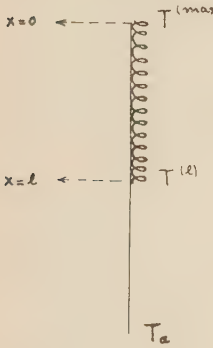


Abb. 10

In dem jetzt zunächst zu betrachtenden Fall liegt also die Maximaltemperatur $T^{(max)}$ des Gitters an dem freien Gitterende. Wird diesem Gitterende die Koordinate $x = 0$ (vergl. Ab 10) zugeordnet, so ist also $T^{(max)} = T(0)$. Die Temperatur am anderen Ende des Gitters ($x = \ell$ an welchem die Wärme abgeleitet wird, soll als Gitterendtemperatur $T^{(\ell)}$ bezeichnet werden; es ist also $T^{(\ell)} = T(\ell)$. Der Index k des betrachteten Gitters soll in diesem Paragraphen fortgelassen werden, da alle Betrachtungen sich stets auf ein und dasselbe Gitter beziehen, Vertauschungen also nicht eintreten können.)

Die jetzt zu behandelnde Integration der Wärmeleitungsgleichung (60) ist mit Hilfe der bekannten Methoden verhältnismässig leicht durchzuführen, solange wie die Randbedingungen, welche die Lösung eindeutig bestimmen, unberücksichtigt bleiben. Weniger einfach ist es jedoch, die so gewonnene allgemeine Lösung den Randbedingungen der hier zu behandelnden Aufgabe anzupassen. Diese Randbedingungen sollen zunächst aufgestellt werden. Da es sich um eine Differentialgleichung zweiter Ordnung handelt, sind zwei solche Randbedingungen erforderlich.

Die erste dieser beiden Bedingungen ergibt sich aus der vorhin eingeführten Voraussetzung, dass die Maximaltemperatur $T^{(max)}$ an der Stelle $x = 0$ liegen soll. Infolgedessen muss

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=0} = 0 \qquad (72)$$

sein. Die zweite Randbedingung folgt aus der Tatsache, dass die gesamte vom Gitter fortgeleitete Energiemenge Q am ableitenden Gitterende durch die Streben fliessen muss. Zwischen der an einer beliebigen Stelle x der Gitterstreben in der Zeiteinheit hindurchfliessenden Wärmemenge $Q^{(x)}$ und dem an dieser Stelle vorhandenen Temperaturgradienten dT/dx besteht nun bekanntlich eine Beziehung welche bei Verwendung der vorhin eingeführten, durch (61) definierten Abkürzung b

$$Q^{(x)} = -b\,\frac{dT}{dx} \qquad (73$$

lautet. Bei der Anwendung dieser Beziehung auf das Wärme ableitende Gitterende ($x = \ell$) ist statt der Grösse $Q^{(x)}$ die gesamte vom Gitter über Zuführung und Halterung abfliessende Wärmemenge Q einzusetzen. Diese ist offenbar abhängig von der Gitterendtemperatur $T^{(\ell)}$ und der Temperatur T_a des Aussenraumes in der Umgebung der

Röhre, so dass also Q als Funktion der beiden Veränderlichen $T^{(\ell)}$ und T_a aufgefasst werden kann. Es kann also gesetzt werden:

$$Q = \varphi(T^{(\ell)}, T_a) \qquad (74)$$

Von der so definierten Wärmeableitungsfunktion φ muss vorausgesetzt werden, dass sie sich nach $T^{(\ell)}$ auflösen lässt, über ihre Berechnung wird später noch gesprochen werden. Unter Benutzung des Ausdruckes (74) für Q erhält man schliesslich aus (73) für $x = \ell$ die Gleichung:

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=\ell} = -\frac{1}{\lambda}\varphi(T^{(\ell)}, T_a) \qquad (75)$$

Die zweite Randbedingung fordert im Gegensatz zu der ersten für den Temperaturgradienten keinen festen Wert, sondern einen Wert, der von der Temperatur an der Stelle $x = \ell$ abhängig ist. Den beiden Bedingungen (72) und (75) muss die Lösung der Differentialgleichung (60) genügen. Der Weg, der zu dieser Lösung führt, soll nun im folgenden beschrieben werden.

Eine erste Integration der gegebenen Gleichung (60) lässt sich dadurch vornehmen, dass in bekannter Weise diese Gleichung mit dT/dx multipliziert wird. Die dann mögliche Integration liefert den Ausdruck

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)^2 = \frac{2}{\lambda\lambda} \cdot \left[\frac{\eta \cdot 0^{(n)}}{\beta+1} \cdot T^{\beta+1} - H \cdot T + c\right] \qquad (76)$$

Die darin vorkommende Integrationskonstante c lässt sich mit Hilfe der zweiten Randbedingung (75) bestimmen, und zwar wird:

$$c = -\left[\frac{\eta \cdot 0^{(n)}}{\beta+1} \cdot T^{(\ell)\,\beta+1} - H \cdot T^{(\ell)}\right] + \frac{\ell}{2\lambda} \cdot \varphi^2(T^{(\ell)}, T_a) \qquad (77)$$

also eine Funktion der Endtemperatur $T^{(\ell)}$. Der so gefundene Wert für c ist in die Gleichung (76) einzuführen. Weiterhin kann dann die Gleichung (76) durch Trennung der Variablen integriert werden, und zwar wird:

$$x(T) = \ell - \int_{T^{(\ell)}}^{T^{(x)}} \frac{dT}{\sqrt{\frac{2}{\lambda\lambda}\left[\frac{\eta \cdot 0^{(n)}}{\beta+1} \cdot T^{\beta+1} - H \cdot T + c\right]}} \qquad (78)$$

Die Ausführung dieser Integration würde schliesslich eine Funktion x (T) ergeben, aus der durch Bildung der Umkehrfunktion die gesuchte Temperaturverteilung T (x) erhalten werden könnte.

Die Berechnung des Integrals (78) ist indessen nicht ohne weiteres möglich, weil das Integral sowohl in der unteren Grenze als auch in der Konstanten c des Integranden die Gitterendtemperatur $T^{(\ell)}$ enthält. Diese besitzt nun aber keinen gegebenen festen Wert; vielmehr ist durch die zweite Randbedingung (75) nur ihre Abhängigkeit von dem Temperaturgradienten am Wärme ableitenden Gitterende bekannt. Um also mit Hilfe der Gleichung (78) in der angedeuteten Weise die Temperaturverteilung ermitteln zu können, muss man zunächst die Gitterendtemperatur $T^{(\ell)}$ bestimmen.

Rein gedankenmässig geht man zu diesem Zwecke so vor, dass man neben der gesuchten, den vorhin aufgestellten Randbedingungen genügenden Lösung auch noch eine Reihe von weiteren Lösungen der gegebenen Differentialgleichung (60) betrachtet, die dadurch erhalten werden, dass die eine der beiden Randbedingungen zunächst unberücksichtigt bleibt. Es ergibt sich also eine Schar von Lösungskurven, welche man sich in der (x, T) Ebene graphisch dargestellt denken kann. Aus dieser Lösungsschar wird weiterhin durch ein geeignetes Kriterium diejenige Kurve herausgehoben, welche der bisher unberücksichtigt gebliebenen Randbedingung genügt. Die gesuchte Endtemperatur $T^{(\ell)}$ des Gitters erhält man dann schliesslich dadurch, dass der Temperaturwert, welchen die zuletzt genannte Kurve an der Stelle $x = \ell$ aufweist, mit Hilfe des erwähnten Kriteriums ermittelt wird.

Zur mathematischen Durchführung dieses Gedankenganges wird die Gitterendtemperatur als veränderlich angenommen. Bei genügend grossem Änderungsbereich wird dann unter den veränderlichen Werten auch die gesuchte Endtemperatur, die sich tatsächlich am Gitterende einstellt, enthalten sein; natürlich besitzt nur diese zuletzt genannte Temperatur eine physikalische Bedeutung, während allen übrigen lediglich mathematische Bedeutung zukommt. Um die beliebigen Endtemperaturen von dem gesuchten Temperaturwert unterscheiden zu können, führt man zweckmässigerweise als Hilfgrösse einen Parameter t ein und fasst die Endtemperatur als Funktion $T^{(\ell)}(t)$ dieses Pararmeters t auf. Die Funktion $T^{(\ell)}(t)$ wird dann weiterhin statt des festen Wertes $T^{(\ell)}$ in das Integral (78) eingeführt. Dadurch wird natürlich auch die durch (78) definierte Funktion $x(T)$ ebenso wie die sich daraus ergebende Umkehrfunktion $T(x)$ von dem Parameter t abhängig. Statt einer einzigen Temperaturverteilungskurve wird jetzt also eine ganze Kurvenschar $T(x, t)$ erhalten, wobei diese Schar einen Bereich der (x, T) Ebene stetig überdeckt (vergl. Abb. 11). In der Kurvenschar $T(x, t)$ ist auch die gesuchte Temperaturverteilung enthalten, und zwar mö[ge] der ihr zugehörige Wer[t] des Parameters t mit t_0 bezeichnet werden. Die Funktion $T(x, t_0)$ stel[lt] dann also die gesuchte Temperaturverteilung d[ar], welche allein eine physikalische Bedeutung b[e]sitzt, da sie den unter den angegebenen Voraussetzungen tatsächlich vorhandenen physikalischen Zustand darstell[t]. Allen übrigen Kurven $T(x, t)$ kommt dagegen lediglich mathematisch[e] Bedeutung zu.

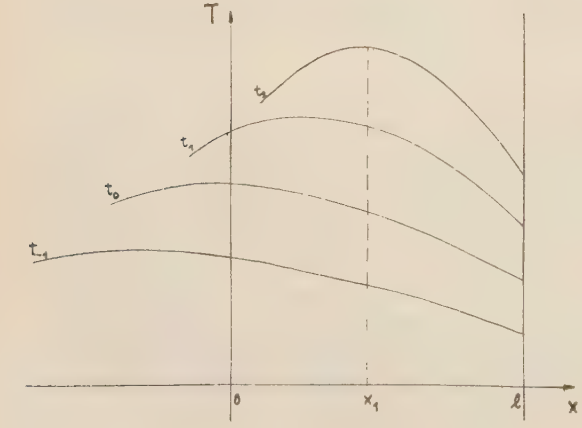


Abb. 11

Im folgenden sol[l] nun untersucht werden, wodurch die gesuchte

Temperaturverteilung sich mathematisch aus der in Abb. 11 dargestellten Kurvenschar T (x, t) heraushebt. Jede Kurve dieser Schar ist offenbar eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung (60) und genügt ausserdem noch der Randbedingung (75), da diese ja bei der Bestimmung der Integrationskonstanten c berücksichtigt wurde. Demgemäss muss also die Temperatur an der Stelle $x = \ell$ mit dem Temperaturgradienten an der gleichen Stelle in der durch die zweite Randbedingung (75) geforderten Beziehung stehen. Im Gegensatz dazu kann die durch (72) ausgedrückte erste Randbedingung nur für die gesuchte Temperaturverteilungskurve T (x, t_0) erfüllt sein, weil diese ja durch die beiden Randbedingungen eindeutig bestimmt ist. Infolgedessen wird das Temperaturmaximum der Lösungskurven T (x, t) im allgemeinen, d.h. für $t \neq t_0$, nicht an der durch die erste Randbedingung geforderten Stelle x = 0 liegen. Wird also die Abzisse des Temperaturmaximums ganz allgemein mit x_1 bezeichnet, so ist dieses x_1 eine Funktion des Parameters t, es ist also:

$$x_1 = x_1(t)$$

Diese Funktion nimmt dann einzig und allein für den zur gesuchten Temperaturverteilung gehörigen Parameterwert t_0 den Wert $x_1(t_0)=0$ an und besitzt für alle Werte $t \neq t_0$ einen von Null verschiedenen Wert $x_1(t) \neq 0$.

Für die derart gekennzeichnete tatsächlich vorhandene Temperaturverteilungskurve T (x, t_0) ist nun weiterhin das bereits erwähnte Kriterium aufzustellen, welches diese Verteilung aus der Schar der anderen in Wirklichkeit nicht möglichen Verteilungen heraushebt. Dabei ist es störend, dass die eine der beiden Randbedingungen sich auf die Endtemperatur, die andere sich auf die Maximaltemperatur des Gitters bezieht. Infolgedessen ist es notwendig, diese beiden Temperaturwerte noch etwas näher zu betrachten und eine Beziehung zwischen beiden aufzustellen.

Die Endtemperatur einer beliebigen Kurve der Schar wird gemäss ihrer Definition durch denjenigen Temperaturwert dargestellt, welchen die betreffende Kurve an der Stelle $x = \ell$ besitzt. Demgemäss ist allgemein

$$T^{(\ell)}(t) = T(\ell, t) \qquad (79a)$$

Insbesondere ergibt diese Funktion für $t = t_0$ die gesuchte zur wirklich vorhandenen Temperaturverteilung gehörige Endtemperatur $T^{(\ell)}(t_0)$, welche zur Berechnung des Integrals (78) benötigt wird.

Die Maximaltemperatur einer beliebigen Kurve der Schar ist nach den bisher gemachten Ausführungen derjenige Wert, welchen die betreffende Kurve an der Stelle $x = x_1$ annimmt. Demnach wird, wenn der Wert des Temperaturmaximums mit $T^{(max)}(t)$ bezeichnet wird:

$$T^{(max)}(t) = T\left[x_1(t), t\right] \qquad (79b)$$

Sowohl die Endtemperatur $T^{(\ell)}$ als auch die Maximaltemperatur $T^{(max)}$ sind also Funktionen des Parameters t.

Offenbar muss zwischen den beiden so definierten Temperaturfunktionen eine Beziehung bestehen, da ja die beiden Temperaturen durch die zugehörige Verteilungskurve T (x, t) eindeutig einander zugeordnet sind. Diese Beziehung ist mit Hilfe des durch (76) ge-

gebenen ersten Integrals der Wärmeleitungsgleichung leicht zu ermitteln. Da nämlich die rechte Seite der Gleichung (76) das Quadrat des Temperaturgradienten darstellt, so lässt sich aus ihr - und zwar dadurch, dass man sie gleich Null setzt - der Wert der Maximaltemperatur für jede beliebige Kurve der Schar, d.h. für jeden beliebigen Wert von t berechnen. Setzt man dabei weiterhin noch den aus (77) sich ergebenden Wert für die Integrationskonstante c ein und berücksichtigt, dass die Endtemperatur gemäss (79a) von t abhängt, so lautet die gesuchte Beziehung zwischen der End- und der Maximaltemperatur des Gitters:

$$T^{(max)}(t) - \frac{\eta \cdot \sigma^{(\tau)}}{(\xi+1)\cdot H} \cdot T^{(max)}(t)^{\xi+1} - T^{(l)}(t) - \frac{\eta \cdot \sigma^{(\tau)}}{(\xi+1)\cdot H} \cdot T^{(l)}(t)^{\xi+1} + \frac{l}{2\lambda \cdot H} \cdot \varphi^2 \left[T^{(l)}(t),\ T_a \right] \qquad (80)$$

Diese Gleichung ermöglicht die Ermittlung der zu ein und demselben Parameter t und damit zur gleichen Kurve der Temperaturverteilung schar gehörenden Werte der Maximal- und der Endtemperatur.

Die praktische Ermittlung dieser Werte führt man wegen der in Gleichung (80) vorkommenden im allgemeinen nicht ganzzahligen Exponenten am besten graphisch durch. Dazu muss man die beiden Seiten der Gleichung (80) jede für sich über der Maximal- bzw. Endtemperatur als Abzissen auftragen und aus den so erhaltenen beiden Kurven diejenigen Werte von $T^{(max)}$ und $T^{(l)}$ bestimmen, welche zu Kurvenpunkten gleicher Ordinate gehören. Es sei noch ergänzend darauf hingewiesen, dass bei dieser praktischen Ermittlung der $T^{(max)}$ und $T^{(l)}$ Werte der Parameter t überhaupt nicht benutzt wird. Vielmehr werden die beiden erwähnten Kurven, welche die beiden Seiten der Gleichung (80) darstellen, einfach für eine Reihe von beliebigen Werten der Temperaturen $T^{(max)}(t)$ und $T^{(l)}(t)$ aufgetragen. Dabei muss allerdings der Bereich der Temperaturwerte genügend gross gemacht werden, so dass man sicher ist, dass in dem gewählten Intervall die zu der gesuchten Temperaturverteilung gehörigen Werte von $T^{(max)}(t_0)$ und $T^{(l)}(t_0)$ auch wirklich enthalten sind. Der Parameter t besitzt jedenfalls nur eine formale Bedeutung und soll lediglich die eindeutige Zuordnung der $T^{(max)}$ und $T^{(\ )}$ Werte ermöglichen.

Aus den soeben angestellten Überlegungen ergibt sich, dass jedes Verfahren, welches die Endtemperatur $T^{(l)}(t_0)$ zu ermitteln gestattet, auch die Maximaltemperatur $T^{(max)}(t_0)$ liefert und das darüber hinaus die Endtemperatur als Funktion der Maximaltemperatur dargestellte werden kann. Da die Ermittlung dieser Funktion, wie angegeben, graphisch erfolgen muss, ist ihre mathematische Form nicht näher bekannt. Jedenfalls kann aber gesetzt werden:

$$T^{(l)}(t) = \theta \left[T^{(max)}(t) \right] \qquad (81)$$

Diese Gleichung gilt für jeden beliebigen Wert von t, und es muss weiterhin nun dasjenige Wertepaar $T^{(max)}(t)$ und $T^{(l)}(t)$ gesucht werden, welches zu der sich tatsächlich einstellenden Temperaturverteilung, d.h. zu dem Parameter $t = t_0$ gehört.

Zur Ermittlung dieses Wertepaares muss nun das erwähnte Kriterium aufgestellt werden, welches die gesuchte - physikalisch allein mögliche - Temperaturverteilung aus der Menge der übrigen - nur mathematisch möglichen - heraushebt. Grundsätzlich unterscheidet sich die gesuchte Temperaturverteilung von allen übrigen Temperaturverteilungen dadurch, dass sie einen Gleichgewichtszustand darstellt, während bei jeder anderen Verteilung das Energiegleichgewicht gestört ist. Da nun der Gleichgewichtszustand durch die Energiebilanz bestimmt ist, so ist zu erwarten, dass sich das gesuchte Kriterium aus der Energiebilanz herleiten lässt. Dazu muss die Energiebilanz in geeigneter Weise aus der Wärmeleitungsgleichung (60) abgeleitet werden.

Zu diesem Zwecke wird die Differentialgleichung (60) in ihrer unveränderten Form, - ohne dass sie wie bei der Bildung des ersten Integrals (76) vorher mit dT/dx multipliziert wird - zunächst einmal integriert. Der Integrationsbereich soll von x_1 bis ℓ laufen, wenn x_1 wieder die - von dem Parameter t abhängige - Stelle ist, an welcher die Maximaltemperatur $T^{(max)}(t)$ vorhanden ist. Es wird dann

$$\left[\frac{dT(x,t)}{dx}\right]_{x=\ell} - \left[\frac{dT(x,t)}{dx}\right]_{x=x_1(t)}$$

$$= \frac{1}{\lambda k}\left\{\eta\,\vartheta^{(\tau)} \cdot \int_{x_1(t)}^{\ell} T^{\S}(x,t)\,dx - \left[\ell - x_1(t)\right]\cdot H\right\}$$

Diese Beziehung gilt für jede Kurve der Lösungsschar, d.h. für jeden beliebigen Wert von t, da auch die Differentialgleichung für jeden beliebigen Wert von t gültig ist. Den auf der linken Seite dieser Gleichung an erster Stelle stehenden Differentialquotienten kann man durch Gleichung (75) ausdrücken, während der an zweiter Stelle stehende, für das Temperaturmaxium gebildete Differentialquotient nach (72) verschwindet. Demnach wird

$$\mathcal{G}\left[T^{(\ell)}(t),\, T_a\right] = \frac{\ell - x_1(t)}{\ell}\cdot H - \frac{\eta\cdot\vartheta^{(\tau)}}{\ell}\int_{x_1(t)}^{\ell} T^{\S}(x,t)\,dx \qquad (82)$$

Damit ist die gesuchte Energiebilanz gewonnen. Auf der linken Seite dieser Gleichung steht nämlich, wie ein Vergleich mit der Gleichung (74) zeigt, die gesamte abgeleitete Wärmemenge Q und auf der rechten Seite erhält man für den Parameter $t = t_0$ die Differenz aus der dem Gitter insgesamt zugeführten und der von ihm insgesamt wieder ausgestrahlten Energie. Für die gesuchte physikalisch allein mögliche Temperaturverteilung stellt also die Gleichung (82) tatsächlich die Energiebilanz dar. Betrachtet man dagegen zum Vergleich eine beliebige andere Temperaturverteilung, für welche also $t \neq t_0$ und $x_1 \neq 0$ ist, so erkennt man, dass dann die Energiedifferenz auf der rechten Seite sich nicht mehr wie vorher auf das gesamte Gitter, sondern nur auf das zwischen den Punkten $x = x_1$ und $x = \ell$ gelegene Teilstück des Gitters bezieht. Die obige Gleichung

besagt dann, dass für eine solche beliebige Verteilung nur die i diesem genannten Teilstück erzeugte Wärmemenge abgeleitet wird, dass ein Energiegleichgewicht im gesamten Gitter unter diesen Um ständen also nicht mehr bestehen kann.

Durch die soeben abgeleitete Gleichung (82) ist also das g suchte Kriterium gefunden, welches die physikalisch allein mögli Temperaturverteilung als Gleichgewichtszustand vor allen anderen Verteilungen kennzeichnet. Da die Gleichung (82) nun lediglich durch mathematische Umformungen aus der gegebenen Wärmeleitungs- gleichung entstanden ist, so wird man vermuten, dass sich mit Hi dieser Gleichung auch die zu dem Gleichgewichtszustand gehörigen Werte von $T^{(\ell)}(t_o)$ bzw. $T^{(max)}(t_o)$ durch geeignete Umformungen bestimmen lassen werden. Man wird daher zunächst danach streben, die auf der rechten Seite von (82) stehenden Glieder soweit wie möglich durch bekannte Werte auszudrücken. Dies geschieht für da Integral über $T^{\bar{F}}$ dadurch, dass die Integrationsveränderliche x durch die Veränderliche T ersetzt wird. Dadurch wird:

$$\int_{x_1(t)}^{\ell} T^{\bar{F}}(x,t)\,dx = \int_{T^{(max)}(t)}^{T^{(\ell)}(t)} \frac{T^{\bar{F}}\,dT}{\frac{dT(x,t)}{dx}} \qquad (83)$$

Diese Gleichung ermöglicht die Berechnung des Integrals in Abhän gigkeit von dem Parameter t, da dT/dx aus Gleichung (76) bekann ist und da die zu einem bestimmten t, bzw. zu einer bestimmten T peraturverteilung gehörigen Werte der Integrationsgrenzen $T^{(max)}(t)$ und $T^{(\ell)}(t)$ mit Hilfe von Gleichung (81) gefunden werden kön nen. Ist der für das Integral (83) gefundene Wert in Gleichung (82) eingesetzt worden, so ist es weiterhin zur Vereinfachung de Rechnung zweckmässig, die dann auf der rechten Seite von (82)ste den bekannten Glieder zusammenzufassen. Die Summe dieser Glieder werde mit P(t) bezeichnet, es ist also:

$$P(t) = H - \frac{\eta \cdot \vartheta^{(\tau)}}{\ell} \cdot \int_{T^{(max)}(t)}^{T^{(\ell)}(t)} \frac{T^{\bar{F}}\,dT}{\frac{dT(x,t)}{dx}} \qquad (84)$$

Die Funktion P(t) kann dann wie aus dem vorhergehenden folgt, fü jeden Wert von t und damit für jede Temperaturverteilung ermittel werden. Unter Benutzung dieser Abkürzung nimmt schliesslich die Gleichung (82) die Form:

$$\bar{G}\left[T^{(\ell)}(t),\ T_a\right] = P(t) - \frac{x_1(t)}{\ell} \cdot H \qquad (85)$$

an. Diese Gleichung kann nach der unbekannten Endtemperatur $T^{(\ell)}$ aufgelöst werden. Wird die dabei sich ergebende Auflösungsfunkti mit $\bar{G}$ bezeichnet, so wird also:

$$T^{(\ell)}(t) = \bar{G}\left[T_a,\ P(t) - \frac{x_1(t)}{\ell} \cdot H\right] \qquad (86)$$

Die genaue Form der Auflösungsfunktion $\bar{G}$ kann erst dann angegeben werden, wenn die durch (74) gegebene Wärmeableitungsfunktion

$\bar{G}(T, {}^{(\ell)}T_a)$ bekannt ist. Darauf werden wir in einem der folgenden Paragraphen noch zurückkommen.

Eine Berechnung der Endtemperatur $T^{(\ell)}(t)$ aus Gleichung (86) ist deswegen nicht möglich, weil auf der rechten Seite noch der unbekannte Wert von $x_1(t)$ vorkommt. Eine solche Berechnung wäre im übrigen auch zwecklos, da die Funktion $T^{(\ell)}(t)$ ja bereits mit Hilfe der Gleichung (81) ermittelt werden kann. Um weiter zu kommen, muss man daher unter Vernachlässigung des unbekannten Gliedes $x_1(t)$ eine Hilfsfunktion durch die Beziehung

$$T^{(\ell)*}(t) = \bar{G}\left[T_a, \mathcal{P}(t)\right] \qquad (87)$$

definieren. Diese Hilfsfunktion $T^{(\ell)*}(t)$ ist dann für alle Werte von t berechenbar. Wesentlich ist aber vor allem, dass sie, wie aus (86) folgt, an der Stelle $t = t_0$ mit der Funktion $T^{(\ell)}(t)$ übereinstimmt, dass also

$$T^{(\ell)*}(t_0) = T^{(\ell)}(t_0) \qquad (88)$$

ist. Für den zur gesuchten Temperaturverteilung gehörigen Parameter t_0 und nur für diesen besitzen also die beiden durch (81) und (87) gegebenen Funktionen $T^{(\ell)}(t)$ und $T^{(\ell)*}(t)$ den gleichen Wert, und zwar ist dieser Wert gleich der gesuchten Endtemperatur $T^{(\ell)}(t_0)$. Durch Kombination der beiden genannten Funktionen muss es daher möglich sein, die Endtemperatur $T^{(\ell)}(t_0)$ zu ermitteln.

Für die praktische Durchführung der Kombination dieser beiden Funktionen (81) und (87) ist es störend, dass in der ersten als unabhängig Veränderliche $T^{(max)}(t)$ vorkommt, nicht dagegen in der zweiten. Es ist daher zweckmässig, die Definitionsgleichung (87) der Hilfsfunktion $T^{(\ell)*}(t)$ noch ein wenig abzuändern. In (87) ist als unabhängige Veränderliche der Parameter t enthalten. Nun wurde bereits mehrfach darauf hingewiesen, dass der Parameter t lediglich zur Kennzeichnung der einzelnen Temperaturverteilungen dient und daher nur formale Bedeutung besitzt. Bei der praktischen Berechnung der Hilfstemperatur $T^{(\ell)*}(t)$ wird man, ähnlich wie bei der Ermittlung der Endtemperatur $T^{(\ell)}(t)$ aus Gleichung (81), von einer Reihe beliebiger Werte $T^{(max)}(t)$ der Maximaltemperatur ausgehen, die nur in einem passend gewählten Intervall liegen müssen. Mit Hilfe dieser $T^{(max)}(t)$ Werte ist dann zunächst die Funktion $\mathcal{P}(t)$ aus (84) und weiterhin die Hilfsfunktion $T^{(\ell)*}(t)$ aus (87) zu berechnen. Es ist daher zweckmässig, in der Gleichung (87) statt des Parameters t die Maximaltemperatur $T^{(max)}(t)$ als unabhängige Veränderliche zu benutzen. Dann wird, da T_a einen festen Wert besitzt:

$$T^{(\ell)*}(t) = \Omega\left[T^{(max)}(t)\right] \qquad (89)$$

Auf das genaue Aussehen der Funktion Ω, das sich aus der Form der Auflösungsfunktion $\bar{G}$ ergibt, wird weiter unten noch näher eingegangen werden.

Mit Hilfe der Gleichungen (81) und (89), die beide die Ma
maltemperatur $T^{(max)}(t)$ als unabhängige Veränderliche enthalte
kann nun leicht die gesuchte Endtemperatur $T^{(\ell)}(t_0)$ und gleichze
tig auch die zur gesuchten Temperaturverteilung gehörige Maxima
temperatur $T^{(max)}(t_0)$ bestimmt werden. Trägt man nämlich die En
temperatur $T^{(\ell)}(t)$ gemäss (81) und die Hilfstemperatur $T^{(\ell)*}(t)$ g
mäss (89) in Abhängigkeit von der Maximaltemperatur $T^{(max)}(t)$ g
phisch auf, so müssen die beiden so entstehenden Kurven sich bei
einem bestimmten Wert von $T^{(max)}(t)$ schneiden, welcher nach (88
dem Parameter $t = t_0$ zuzuordnen ist. Die gesuchten Werte der End
und der Maximaltemperatur erhält man dann als die Koordinaten di
ses Schnittpunktes. Nur dieses Wertepaar entspricht, wie erwähnt
der physikalisch allein möglichen Temperaturverteilung, während
alle übrigen Wertepaare zu Temperaturverteilungen gehören, bei
welchen das Energiegleichgewicht gestört ist.

Nachdem so die End- und die Maximaltemperatur ermittelt wo
den ist, ist es zur Berechnung der Temperaturverteilung nur noch
nötig, den gefundenen Wert $T^{(\ell)}(t_0)$ der Endtemperatur in das In-
tegral (78) einzuführen. Durch graphische Auswertung des Integra
werden dann punktweise die zu bestimmten Temperaturwerten T gehö
gen Koordinaten x erhalten. Im allgemeinen wird jedoch diese etw
umständliche Berechnung der Temperaturverteilung nicht erforderl
sein. Da man nämlich aus der End- und der Maximaltemperatur bere
die Grenzen der Gittertemperatur ersehen kann, wird man auf die
Kenntnis des Temperaturverlaufes in vielen Fällen verzichten kön

Die Berechnung der Funktion P (t) mit Hilfe der Gleichung
(84) ist ziemlich langwierig, denn das in P (t) enthaltene Inte-
gral (83), welches die Ausstrahlung des Gitterstückes zwischen d
Punkten $x = x_1$ und $x = \ell$ darstellt, kann ebenso wie das Integral
(78) nur auf graphischem Wege bestimmt werden. Man muss daher zu
Ermittlung von P (t) für eine ganze Reihe von Wertepaaren $T^{(max)}$
$T^{(\ell)}(t)$ eine graphische Integration durchführen. Die hiermit ver
bundene erhebliche Rechenarbeit lässt sich in vielen Fällen dadu
verringern, dass man für das Integral (83) einen Näherungswert b
nutzt. Ist nämlich der Unterschied zwischen der Maximal- und der
Endtemperatur im Gitter nicht allzu gross, so kann man zur Bere
nung des Integrals (83) die unbekannte Temperaturverteilungsfunk
tion T (x, t) näherungsweise durch einen Parabelbogen ersetzen.
Die Gleichung dieses Parabelbogens lässt sich dann durch die Tem
peraturwerte $T^{(max)}(t)$, $T^{(\ell)}(t)$ und durch die Abszisse $x_1(t)$ d
Temperaturmaximums ausdrücken, und zwar ergibt sich, wenn man di
Gleichungen (79a) und (79b) und die aus (79b) folgende Bedingung:

$$\left[\frac{dT(x,t)}{dx}\right]_{x=x_1} = 0$$

berücksichtigt, die folgende Beziehung:

$$T(x,t) \sim T^{(max)}(t) - \frac{T^{(max)}(t) - T^{(l)}(t)}{\left[l - x_1(t)\right]^2} \left[x - x_1(t)\right]^2$$

Der so gefundene Näherungswert für die Temperaturverteilungsfunktion muss weiterhin in das Integral (83) eingesetzt werden. Nach Durchführung der Variablentransformation $u = \frac{x - x_1}{l - x_1}$ lässt sich das so gewonnene Integral durch Reihenentwicklung berechnen, und es wird endlich:

$$\int_{x_1(t)}^{l} T^{\frac{3}{2}}(x,t)\,dx \cdot l \cdot T^{(max)}(t)^{\frac{3}{2}} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{2\nu+1} \cdot \binom{\frac{3}{2}}{\nu} \cdot \left| \frac{T^{(max)}(t) - T^{(l)}(t)}{T^{(max)}(t)} \right|^\nu \qquad (90)$$

Die auf der rechten Seite dieser Gleichung auftretende unendliche Reihe konvergiert ziemlich stark, so dass die Glieder mit höheren Potenzen als der dritten stets vernachlässigt werden können. Die Berechnung des Integrals (83), d.h. der Ausstrahlung des Gitterstückes zwischen den Punkten $x = x_1$ und $x = l$, ist also mit Hilfe des Näherungswertes (90) verhältnismässig bequem durchzuführen. Es sei noch ausdrücklich darauf hingewiesen, dass der Fehler, welcher durch die Verwendung der oben angegebenen angenäherten Temperaturverteilungsfunktion gemacht wird, lediglich in das Ausstrahlungsintegral (83) eingeht und dass alle übrigen Berechnungen sich auch in diesem Falle auf die exakte Verteilungsfunktion T (x, t) beziehen.

Damit ist die Aufgabe, die Temperaturverteilung in einem Gitter zu berechnen, wenigstens für den Fall gelöst, dass die Ableitung der gesamten Wärme nur an einem Gitterende erfolgt. Es bleibt jetzt noch übrig, auf den allgemeinen Fall einzugehen, in dem die Wärme an beiden Enden abgeleitet wird.

Ein Sonderfall hiervon liegt dann vor, wenn die an den beiden Enden abgeleiteten Wärmemengen gleich gross sind. In diesem Falle liegt das Maximum der Temperatur in der Mitte des Gitters, und es können die beiden Hälften des Gitters in bezug auf die Wärmeleitung als vollkommen unabhängig betrachtet und getrennt untersucht werden. Die Untersuchung selbst erfolgt dann in der Weise, dass die bisherigen Betrachtungen unverändert auf eine der beiden Seiten des Gitters angewendet werden.

Für den allgemeinsten Fall, in dem an den beiden Gitterenden verschieden grosse Wärmemengen abgeleitet werden, bedarf das bisher geschilderte Verfahren einer Abänderung. Während nämlich in dem bisher betrachteten Fall die maximal- und die Endtemperatur besonders berücksichtigt wurden, müssen jetzt die beiden an den Stellen $x = 0$ und $x = l$ herrschenden Endtemperaturen betrachtet werden. Für die beiden Gitterenden gelten dann zwei Randbedingungen ähnlich der Bedingung (75), während die Gleichung (72) fortfällt. Die eine dieser Randbedingungen verwendet man zur Ermittlung der Integrationskonstanten c in (76), während die zweite dazu benutzt wird, um wieder zwei Gleichungen für die beiden Endtemperaturen aufzustellen, die graphisch zu lösen sind. Prinzipiell bleibt also das Verfahren in

diesem allgemeinen Fall dasselbe, nur wird die Ausführung etwas umständlicher, da die einfache Randbedingung (72) durch eine we ger einfache ersetzt wird. Aus diesem Grunde wurde das Verfahre unter der erwähnten einschränkenden Voraussetzung abgeleitet, auch den in den meisten praktischen Fällen vorliegenden Verhäl nissen entspricht.

§ 24 Die Ermittlung der genauen Werte der Gittertemperatur

Die auf die soeben geschilderte Art und Weise erhaltenen Werte der Gittertemperatur stellen, worauf schon in § 22 hingew sen wurde, nur Näherungswerte dar, weil die in der Wärmeleitung gleichung (60) vorkommende zugeführte Energie H_k nur näherungs weise ermittelt werden konnte. Der Grund hierfür bestand darin, dass die in der Gleichung (70) enthaltenen unbekannten Wärmelei tungsglieder Q_v zunächst vernachlässigt werden mussten. Im folg den soll nun gezeigt werden, wie man diese Wärmeleitungsglieder mit Hilfe der in der ersten Näherung bestimmten Elektrodentempe turen berücksichtigen und auf diese Weise genauere Werte für di Gittertemperatur erhalten kann.

Von den in Gleichung (70) vorkommenden Wärmeleitungsglied Q_v (v = 2 .... n) lässt sich das Glied $(h_{kk} - 1) \cdot Q_k$, das den direkten Einfluss der vom bisher betrachteten (k - 1) ten Gitter abfliessenden Wärme auf die Temperatur dieses selben Gitters da stellt, am einfachsten berücksichtigen. Dazu ist die jetzt näher rungsweise bekannte Gittertemperatur $T_k^{(1)}$ in die Gleichung (74 einzusetzen. Dadurch wird ein erster Näherungswert für die abge leitete Wärmemenge Q_k erhalten, und zwar wird, wenn durchweg al ersten Näherungen mit dem oberen Index (1) bezeichnet werden:

$$Q_k^{(1)} = \varphi(T_k^{(1)(1)}, T_a)$$

Die Einführung dieses Näherungswertes für Q_k in die Gleichung liefert, wenn man die übrigen Wärmeleitungsglieder Q_v für v = auch weiterhin vernachlässigt, einen zweiten Näherungswert für zugeführte Energie H_k. Unter Berücksichtigung von (71) wird dar

$$H_k^{(2)}(E_1) = H_k^{(1)}(E_1) - (h_{kk} - 1) \cdot \varphi(T_k^{(1)(1)}, T_a) \qquad (9$$

Mit diesem genaueren Wert der zugeführten Energie ist in der gl chen Weise wie vorher wiederum die Gittertemperatur zu berechne die damit also ebenfalls in der zweiten Näherung bekannt ist.

Das angegebene Näherungsverfahren lässt sich natürlich be liebig oft fortsetzen. Dazu ist aus der in der zweiten Näherung bekannten Gitterendtemperatur wiederum die abgeleitete Wärmemen $Q_k^{(2)}$ zu bestimmen, diese dann in (70) einzusetzen und so fort. so zu gewinnenden Näherungen werden in den allermeisten Fällen benötigt, weil schon die erste Näherung einen genügend genauen Temperaturwert liefert. Die Gittertemperatur wird nämlich schon durch die erste Näherung nur noch um etwa 1 % geändert. Daraus hervor, dass tatsächlich, wie bereits in § 22 auseinandergeset wurde, der indirekte Einfluss der Wärmeleitung auf die Gitterte ratur sehr gering ist.

Eine weitere Verbesserung des auf Grund der bisherigen Beachtungen erhaltenen Wertes für die Gittertemperatur ist dadurch glich, dass man ausser dem Glied Q_k auch noch die übrigen bisher rnachlässigten Wärmeleitungsglieder Q_v ($v \neq k$) in Gleichung (70) rücksichtigt. Dazu ist es allerdings erforderlich, dass auch die mperaturen aller übrigen Gitter (nicht nur die des (k - 1) ten) erster Näherung berechnet werden. Aus diesen Temperaturwerten nnen mit Hilfe der Gleichung (74) die Wärmeleitungsglieder Q_v genähert ermittelt werden. Diese sind dann in entsprechender ise wie in der Gleichung (91) bei der Berechnung der zugeführten ergie H_k zu berücksichtigen. Wenn diese Ermittlung weiterer Näheungen auch erheblich umständlicher ist als die Berechnung der Gittertemperatur in den ersten beiden Näherungen, so ist es doch, wie n sieht, in der angegebenen Weise prizipiell möglich, die Temperatur eines jeden Gitters mit beliebig grosser Annäherung festzuellen.

Es hängt von dem Zweck der jeweiligen Untersuchung ab, ob n die umfangreiche Rechenarbeit durchführen muss, welche für die eben geschilderte genaue Berechnung der Temperatur eines Gitters nsbesondere des Steuergitters) erforderlich ist, oder ob man sich t einem weniger genauen Temperaturwert begnügen kann. Auf die naue Bestimmung der Gittertemperatur kann man sicherlich dann rzichten, wenn, worauf später noch eingegangen werden soll, die hängigkeit der Gittertemperatur von irgendwelchen als veränderlich genommenen Konstanten der Röhre, z.B. der Wärmeleitfähigkeit der tterstreben, der Strahlungskonstanten der Elektroden oder dergl. tersucht werden soll. In diesen Fällen werden bereits die in der sten Näherung erhaltenen Werte für die Gittertemperatur Aufschluss er die Grösse der gesuchten Abhängigkeit ergeben. Die weiteren herungen würden wegen der geringen Änderung, welche die Gittermperatur durch sie erfährt, den Gang der gesuchten Abhängigkeit ch nur unwesentlich beeinflussen, so dass man sich die damit verndene Rechenarbeit ersparen kann.

§ 25 Zusammenfassung des abgeleiteten Rechenverfahrens und Angabe von Formeln für bestimmte Röhrenarten

Als Abschluss der Überlegungen, welche zur Berechnung der Gittertemperatur einer n-Elektrodenröhre geführt haben, sei der dazu forderliche Rechnungsgang noch einmal kurz zusammengefasst. Der ste Schritt zur Berechnung der Temperatur T_k des Gitters mit dem dex k besteht in der näherungsweisen Ermittlung der dem Gitter geführten Energie H_k durch Aufstellung und Lösung des Grundgleiungssystems (29). Der zweite Schritt liefert durch Integration r Wärmeleitungsgleichung (60) unter Benutzung des Näherungswertes) für die zugeführte Energie einen angenäherten Wert für die ttertemperatur. Den dritten Schritt schliesslich bildet die Bemmung des genauen Wertes der Gittertemperatur mittels eines Näherungsverfahrens.

Im einzelnen ist entsprechend dieser Einteilung folgendermassen zu verfahren. Zunächst sind aus den Abmessungen der Elektroden die Koeffizienten e_{ik} und e^*_{ik} des Grundgleichungssystems zu bestimmen. Sie ergeben sich als das Produkt der für eine Röhre mit

unendlich langen Elektroden geltenden Koeffizienten e_{ik}^{∞} und e_{ik}^{*} welche mit Hilfe der Formeln (34) und (36) bzw. (42) und (43) z berechnen sind, und der Endlichkeitsfaktoren φ_{ik} und φ_{ik}^{*}, we che durch graphische Auswertung der Integrale (50) bzw. (51) un (52) erhalten werden. Mit Hilfe der so berechneten Koeffiziente und der als bekannt vorausgesetzten Werte für das Reflexions- u Absorptionsvermögen der Elektroden ist dann weiterhin die Syste determinante (64) des Grundgleichungssystems aufzustellen und z berechnen. Ausser dieser Systemdeterminante müssen noch die Wer der aus ihr gebildeten Unterdeterminanten u_{1v} v und u_{kv} (v = 1 . ermittelt werden (vergl. § 22). Nachdem dann weiterhin mit Hilf dieser Determinanten die Faktoren h_{kv} nach Gleichung (69) berec net worden sind, erhält man schliesslich für die dem Gitter zug führte Energie H_k eine Beziehung von der Form der Gleichung (70

Die in dieser Beziehung enthaltenen unbekannten Wärmeleit glieder Q_v müssen vorerst vernachlässigt werden. Dadurch ergibt sich für die Energie H_k der durch (71) dargestellte erste Näher wert, welcher für jeden Wert E_1 der Kathodenstrahlung berechnet werden kann. Die Ausstrahlung der Kathode erhält man dabei aus als bekannt vorausgesetzten Kathodentemperatur T_1 mit Hilfe des Ausstrahlungsgesetzes (1). Der damit durchgeführte erste Schrit des Verfahrens liefert also einen ersten Näherungswert $H_k^{(1)}$ fü die dem Gitter zugeführte Energie in Abhängigkeit von der Katho temperatur T_1 in Form einer Funktion

$$H_k^{(1)} = H_k^{(1)}(T_1) \qquad (92)$$

Der zweite Schritt der Rechnung besteht darin, dass die s gefundenen Werte der zugeführten Energie in die Wärmeleitungsgl chung (60) eingesetzt werden und diese Differentialgleichung in griert wird. Für den einfachsten Fall, in dem die Ableitung der Wärme nur an einem Ende des Gitters erfolgt, ist diese Integrat in der im folgenden beschriebenen Weise durchzuführen. Es wird ben der gesuchten Temperaturverteilung, welche der Differential- gleichung (60) und den beiden Randbedingungen (72) und (75) gehe noch eine Schar von - physikalisch nicht möglichen - Verteilung untersucht, welche zwar der Differentialgleichung (60) und der bedingung (75) nicht aber der Randbedingung (72) genügen. Für di beliebigen von einem Parameter t abhängigen Temperaturverteilun werden mit Hilfe der Gleichung (80) die zueinander gehörenden We te $T^{(max)}(t)$ der Maximaltemperatur und $T^{(\ell)}(t)$ der Endtemperatu des Gitters berechnet. Praktisch geschieht dies so, dass die bei Seiten von (80) graphisch in Abhängigkeit von der Temperatur als Abzisse aufgetragen und die Temperaturwerte ermittelt werden, welche zu gleichen Ordinaten der so erhaltenen Kurven gehören. diese Weise wird eine Reihe von Wertpaaren $T^{(max)}(t)$; $T^{(\ell)}(t)$ e halten, deren jedes einer bestimmten Temperaturverteilung zuzuor ist.

Zur Bestimmung desjenigen Wertepaares, welches zu der gesu ten physikalisch allein möglichen Temperaturverteilung gehört, weiterhin zunächst eine durch Gleichung (84) definierte Hilfsfun tion P (t) für eine Reihe von Wertepaaren $T^{(max)}(t)$, $T^{(\ell)}(t)$ be

et. Die Berechnung des in P (t) enthaltenen Integrals kann entwe-
er auf graphischem Wege erfolgen, oder aber es kann - bei nicht
llzu grossen Temperaturuntersohieden im Gitter - für dieses Inte-
ral der durch Gleichung (90) gegebene Näherungswert benutzt wer-
en. Die Einführung der so für P (t) gefundenen Werte in die Glei-
ung (87) liefert eine Hilfstemperatur $T^{(\ell)*}(t)$. Schliesslich ist
owohl diese Hilfstemperatur $T^{(\ell)*}(t)$ wie auch die Endtemperatur
$^{(\ell)}(t)$ graphisch als Funktion der Maximaltemperatur $T^{(max)}(t)$
ufzutragen. Dadurch werden zwei einander schneidende Kurven erhal-
en, die Koordinaten ihres Schnittpunktes liefern die zu der ge-
uchten Temperaturverteilung gehörigen Werte der Maximal- und der
ndtemperatur des Gitters. Die Berechnung dieser Temperaturwerte
st für jeden der durch (92) gegebenen Werte der zugeführten Ener-
ie H_k durchzuführen, so dass also auf diese Weise schliesslich
ie beiden Funktionen

$$T_k^{(max)} = \mathcal{F}_1(H_k) \quad ; \quad T_k^{(\ell)} = \mathcal{F}_2(H_k) \qquad (93)$$

n graphischer Darstellung erhalten werden.

Die so ermittelten Temperaturen stellen eine erste Näherung
ar. Diese ist ausreichend, wenn es sich darum handelt, die Abhän-
igkeit der Gittertemperatur von irgendwelchen als veränderlich
ngenommenen Grössen der Röhre zu bestimmen. In diesem Fall kann
an durch Kombination der Gleichungen (92) und (93) für jeden ge-
ebenen Wert der Kathodentemperatur die Maximal- und die Endtempe-
atur des Gitters mit dem Index k berechnen. Aus den für die End-
mperatur gefundenen Werten erhält man schliesslich mit Hilfe des
ntegrals (78), das graphisch auszuwerten ist, die gesuchte Tempe-
aturverteilung längs des Gitters, die somit ebenfalls für jede
mperatur der Kathode bestimmt werden kann.

Wenn jedoch die genauen Werte der Gittertemperatur berechnet
erden sollen, muss als dritter Schritt noch ein Näherungsverfahren
urchgeführt werden, durch welches die bis jetzt vernachlässigten
n (70) auftretenden Wärmeleitungsglieder Q_ν berücksichtigt werden.
ur Berücksichtigung des Gliedes Q_k ist aus (91) unter Benutzung
on (74) ein zweiter Näherungswert $H_k^{(2)}$ für die zugeführte Energie
u ermitteln. Um aus diesem Näherungswert die entsprechend verbes-
erten Werte für die Gittertemperatur zu erhalten, braucht man die
ntegration der Differentialgleichung (60) nicht noch einmal durch-
uführen, sondern es ist dazu nur erforderlich, dass der Wert
$^{2)}$ in die durch den zweiten Schritt der Rechnung gewonnene Bezie-
ng (93) eingesetzt wird. Auf diese Weise erhält man die maximale
d die Endtemperatur des Gitters in der zweiten Näherung; die zu-
hörige Temperaturverteilung kann wiederum mit Hilfe des Integrals
8) gefunden werden. Damit ist der Einfluss des Gliedes Q_k genü-
nd berücksichtigt, eine Verbesserung des für Q_k einzusetzenden
rtes durch weitere Näherungen würde die erhaltene Gittertemperatur
r noch unwesentlich ändern. Um einen noch genaueren Wert für die-
Temperatur zu gewinnen, muss man schliesslich auch die in der
eichung (70) auftretenden Wärmeleitungsglieder Q_ν für $\nu \neq k$ be-
cksichtigen. Dazu sind zunächst die Temperaturen aller übrigen
tter nach dem vorher geschilderten Verfahren näherungsweise zu

bestimmen, und es ist dann weiter so vorzugehen, wie es soeben b der Berücksichtigung des Gliedes Q_k auseinandergesetzt wurde.

Damit ist die gestellte Aufgabe gelöst, es kann mit Hilfe angegebenen Verfahrens die Temperatur der Gitter, insbesondere d des Steuergitters, für Röhren mit zylindrischen Elektroden bei b liebiger Anordnung und beliebiger Zahl dieser Elektroden berechn werden.

Die zur Berechnung der Gittertemperatur in den vorhergehen Paragraphen abgeleiteten Formeln beziehen sich auf den allgemein sten Fall einer Röhre mit n Elektroden. Es erscheint angebracht, diese allgemeinen Formeln dadurch, dass für die Anzahl der Elekt den bestimmte Werte eingesetzt werden, zu spezialisieren, damit Zahlenrechnung, welche für jede zu untersuchende Röhrentype ausz führen ist, einen möglichst geringen Umfang annimmt und so die praktische Anwendung des neuen Verfahrens erleichtert wird. Mit Rücksicht auf die im nächsten Teil zu beschreibende experimentel Nachprüfung der Voraussetzungen, welche bei der Übertragung des neuen Verfahrens auf die Elektrodenröhre gemacht werden mussten, sollen dabei auch die Formeln für die Zweielektrodenröhre angege ben werden.

Eine derartige Spezialisierung der Formeln lässt sich einma für die in den Paragraphen 18 und 19 berechneten Koeffizienten e_{ik}^{∞} und $e_{ik}^{*\infty}$ der Röhre mit unendlich langen Elektroden durchführe Weiterhin lassen sich auch die Determinanten $\mathfrak{F}$ und u_{iv} (vergl.§ durch Formeln ausdrücken. Ehe jedoch die sich ergebenden Werte b Formeln aufgeschrieben werden, soll vorher kurz die Methode ge- schildert werden, nach welcher die genannten Determinanten zu be rechnen sind.

Eine Determinante von gegebener Ordnung kann bekanntlich u so leichter ermittelt werden, je grösser die Zahl ihrer Nullele- mente ist. Wenn also die durch (64) gegebene Systemdeterminante berechnet werden soll, so wird man zunächst versuchen, eine mög- lichst grosse Anzahl ihrer Elemente durch eine geeignete Umformu zu Null zu machen. Eine solche Umformung der Determinante (64) lässt sich mit Hilfe eines Satzes aus der Determinantentheorie durchführen, nach welchem der Wert einer Determinante sich nicht ändert, wenn man zu einer ihrer Zeilen oder Spalten beliebige Vi fache anderer Zeilen oder Spalten hinzufügt. Es sind nämlich, wi man bei näherer Betrachtung der Determinante (64) erkennt, in ih Zeilen und Spalten mehrfach die gleichen Koeffizienten e_{ik} bzw. e_{ik}^{*} enthalten. Zieht man also unter Anwendung des erwähnten Sat diejenigen Zeilen und Spalten, in denen einander gleiche Koeffiz enten stehen, in geeigneter Weise voneinander ab, so gewinnt man dadurch eine grosse Zahl von Nullelementen.

Die Einzelheiten der soeben angedeuteten Umformung der Det minante (64) brauchen, da lediglich elementare Rechenoperationen durchzuführen sind, nicht näher beschrieben zu werden. Es sei nu darauf hingewiesen, dass aus einem später ersichtlichen Grunde b dem zur Umformung erforderlichen zeilen- und spaltenweisen Abzie die ersten n-Zeilen und Spalten nicht von anderen abgezogen werd Zur Erleichterung der Rechnung ordnet man nach der Umformung die Zeilen und Spalten der Determinante zweckmässigerweise so an, dass die Nullelemente möglichst in den vorderen Spalten und den oberen Zeilen stehen. Man erhält dann schliesslich die Systemde- minante $\mathfrak{F}$ in der folgenden Form:

(94)

$N =$

ε_n	ε_{n-1}	.	.	ε_4	ε_3	ε_2	ε_1	ε_{n-1}	ε_{n-2}	.	.	ε_3	ε_2	ε_1	ε_2	ε_3	ε_4	.	.	E_{n-1}	E_n	Abs. Glied	
$-\frac{2}{a_n}-\frac{1}{\rho_n}$	0	.	.	0	0	0	0	0	0	.	.	0	0	0	0	0	0	.	.	0	$-\frac{1}{\rho_n}$	$-\frac{V_n}{a_n}$	(a n)
0	$-\frac{2}{a_{n-1}}-\frac{2}{\rho_{n-1}}$	.	.	0	0	0	0	$\frac{1}{\rho_{n-1}}$	0	.	.	0	0	0	0	0	0	.	.	$\frac{1}{\rho_{n-1}}$	0	$-\frac{V_{n-1}}{a_{n-1}}$	(a n-1)
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
0	0	.	.	$-\frac{2}{a_4}-\frac{2}{\rho_4}$	0	0	0	0	0	.	.	0	0	0	0	0	$\frac{1}{\rho_4}$	.	.	0	0	$-\frac{V_4}{a_4}$	(a, 4)
0	0	.	.	0	$-\frac{2}{a_3}-\frac{2}{\rho_3}$	0	0	0	0	.	.	$\frac{1}{\rho_3}$	0	0	0	$\frac{1}{\rho_3}$	0	.	.	0	0	$-\frac{V_3}{a_3}$	(a, 3)
0	0	.	.	0	0	$-\frac{2}{a_2}-\frac{2}{\rho_2}$	0	0	0	.	.	0	$\frac{1}{\rho_2}$	0	$\frac{1}{\rho_2}$	0	0	.	.	0	0	$-\frac{V_2}{a_2}$	(a, 2)
0	0	.	.	0	0	0	$-\frac{1}{a_1}-\frac{1}{\rho_1}$	0	0	.	.	0	0	$\frac{1}{\rho_1}$	0	0	0	.	.	0	0	$-\frac{V_1}{a_1}$	(a 1)
0	$\frac{1}{\rho_{n-1}}$	.	.	0	0	0	0	$-\frac{1}{\rho_{n-1}}$	0	.	.	0	0	0	0	0	0	.	.	0	$e_{n-1,n}$	0	(c, n-1)
0	0	.	.	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{\rho_{n-2}}$	.	.	0	0	0	0	0	0	.	.	$e_{n-2,n-1}$	$e_{n-2,n}$	0	(c, n-2)
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
0	0	.	.	0	$\frac{1}{\rho_3}$	0	0	0	0	.	.	$-\frac{1}{\rho_3}$	0	0	0	0	e_{34}	.	.	$e_{3,n-1}$	e_{3n}	0	(c, 3)
0	0	.	.	0	0	$\frac{1}{\rho_2}$	0	0	0	.	.	0	$-\frac{1}{\rho_2}$	0	0	e_{23}	e_{24}	.	.	$e_{2,n-1}$	e_{2n}	0	(c, 2)
0	0	.	.	0	0	0	$\frac{1}{\rho_1}$	0	0	.	.	0	0	$-\frac{1}{\rho_1}$	e_{12}	e_{13}	e_{14}	.	.	$e_{1,n-1}$	e_{1n}	0	(c 1)
0	0	.	.	0	0	$\frac{1}{\rho_2}$	0	0	0	.	.	0	0	e_{21}	$\dot{e}_{22}-\frac{1}{\rho_2}$	$\dot{e}_{23}$	$\dot{e}_{24}$	.	.	$\dot{e}_{2,n-1}$	$\dot{e}_{2n}$	0	(b, 2)
0	0	.	.	0	$\frac{1}{\rho_3}$	0	0	0	0	.	.	0	e_{32}	e_{31}	$\dot{e}_{32}$	$\dot{e}_{33}-\frac{1}{\rho_3}$	$\dot{e}_{34}$	.	.	$\dot{e}_{3,n-1}$	$\dot{e}_{3n}$	0	(b, 3)
0	0	.	.	$\frac{1}{\rho_4}$	0	0	0	0	0	.	.	e_{43}	e_{42}	e_{41}	$\dot{e}_{42}$	$\dot{e}_{43}$	$\dot{e}_{44}-\frac{1}{\rho_4}$	.	.	$\dot{e}_{4,n-1}$	$\dot{e}_{4n}$	0	(b, 4)
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
0	$\frac{1}{\rho_{n-1}}$	.	.	0	0	0	0	0	$e_{n-1,n-2}$	.	.	$e_{n-1,3}$	$e_{n-1,2}$	$e_{n-1,1}$	$\dot{e}_{n-1,2}$	$\dot{e}_{n-1,3}$	$\dot{e}_{n-1,4}$	.	.	$\dot{e}_{n-1,n-1}-\frac{1}{\rho_{n-1}}$	$\dot{e}_{n-1,n}$	0	(b, n-1)
$\frac{1}{\rho_n}$	0	.	.	0	0	0	0	$e_{n,n-1}$	$e_{n,n-2}$	.	.	e_{n3}	e_{n2}	e_{n1}	$\dot{e}_{n2}$	$\dot{e}_{n3}$	$\dot{e}_{n4}$	.	.	$\dot{e}_{n,n-1}$	$\dot{e}_{nn}-\frac{1}{\rho_n}$	0	(b, n)

Dabei ist auf der rechten Seite neben der Determinante die Zahl
reihe der absoluten Glieder des Grundgleichungssystems aufgesch
ben worden, weil diese später noch zur Berechnung der Unterdete
minanten $u_{i\,\nu}$ benötigt wird. Um zu zeigen, in welcher Art und W
die Anordnung der Zeilen und Spalten beim Übergang von (64) zu
geändert wurde, sind genau wie in (64) die Spalten durch die zu
hörigen Unbekannten des Grundgleichungssystems und die Zeilen e
sprechend ihrer Reihenfolge im Grundgleichungssystem gekennzeic
net worden. Es mag endlich noch erwähnt werden, dass die Änderu
der Zeilen- und Spaltenordnung unter Umständen mit einem Wechse
des Vorzeichens der Determinante verbunden sein kann. Dieser Vo
zeichenwechsel braucht jedoch nicht berücksichtigt zu werden, d
bei den weiteren Rechnungen immer nur der Absolutwert der Deter
nanten benötigt wird.

Zur Ermittlung der Elektrodentemperaturen müssen nun (ver
§ 24) ausser der Systemdeterminante $\mathcal{W}$ auch noch die Unterdeterm
nanten $u_{i\,\nu}$ $(i,\nu = 1....n)$ berechnet werden. Diese erhält man, w
in § 22 ausgeführt wurde, dadurch, dass man in der Systemdeterm
nante (64) die der Unbekannten E_i zugehörige i-te Spalte und di
ν-te Zeile streicht. Statt der Determinante (64) kann nun zur B
rechnung der Unterdeterminanten $u_{i\nu}$ auch die wesentlich einfach
Determinante (94) verwendet werden. Da nämlich die Indices i u
ν nur von 1 bis n laufen, so ist zur Bildung der $u_{i\nu}$ stets nur
ne der ersten n-Zeilen bzw. -Spalten in (64) zu streichen. Nun
de aber die Umformung von (64) in (94) so vorgenommen, dass die
ersten n-Zeilen und -Spalten nicht von anderen abgezogen wurden
Durch diese Art der Umformung wird also verhindert, dass Gliede
welche in den zu streichenden Zeilen bzw. Spalten der Determina
(64) stehen, nach der Umformung auch noch in anderen Zeilen ode
Spalten der Determinante (94) auftreten. Da also die bei der Bi
dung der $u_{i\nu}$ ungeändert stehen bleibenden Zeilen und Spalten d
die Umformung von (64) von den zu streichenden Zeilen und Spalt
gar nicht beeinflusst werden, so müssen die $u_{i\nu}$ sich aus der um
formten Determinante (94) in der gleichen Weise wie aus der urs
lichen Determinante (64) ergeben. Man erhält daher die Unterdet
minanten $u_{i\nu}$, indem man in (94) die entsprechenden Zeilen und S
ten wie in (64) - gekennzeichnet durch die rechts bzw. oben her
geschriebenen Indices - streicht.

Man wird nun natürlich versuchen, die eigentliche Berechn
der Determinanten $\mathcal{W}$ und $u_{i\nu}$ möglichst allgemeine für beliebige
te der Koeffizienten e_{ik}, des Reflexionsvermögens ρ_i und des Ab
tionsvermögens a_i durchzuführen, um zu vermeiden, dass für jede
zu untersuchende Röhre auch die Determinanten neu berechnet wer
müssen. Eine solche allgemeine Berechnung, bei welcher die zu b
rechnenden Determinanten in bekannter Weise in Unterdeterminant
zu entwickeln sind, wird nun zwar durch die grosse Zahl von Nul
elementen, welche in (94) enthalten sind, sehr erleichtert, tro
dem ist sie praktisch nur in den beiden einfachsten Fällen, näm
für die Elektrodenzahl n gleich zwei und drei durchführbar. In
len übrigen Fällen (n > 3) wird sie derart umständlich und unüb
sichtlich, dass man zweckmässigerweise auf sie verzichtet. Es i
dann bequemer, die Determinanten erst nach dem Einsetzen von Za

nwerten zu berechnen, wodurch sich allerdings der Nachteil ergibt, ss für jede Röhre mit etwas veränderten Konstanten auch neue De- rminanten ermittelt werden müssen.

Im folgenden sollen weiterhin zunächst die Formeln für die effizienten e_{ik}^{∞} bzw. $e_{ik}^{*\infty}$ der Röhre mit unendlich langen Elektro- g sowie die allgemeinen Formeln, welch sich für die Determinanten und u_{iv} ergeben, für die beiden Fälle n = 2 und n = 3 angegeben rden. Diese lauten bei der Zweielektrodenröhre

n = 2:

r die Koeffizienten:

$$e_{12}^{\infty} = -\frac{r_1}{r_2} \qquad e_{21}^{\infty} = 1$$

$$e_{22}^{*\infty} = 1 - \frac{r_1}{r_2} \tag{95}$$

e Systemdeterminante (94) ist in diesem Falle:

$$\mathcal{N} = \begin{vmatrix} E_2' & E_1 & E_1^{(ra)} & E_2^{(ri)} & \\ -\frac{2}{a_2} - \frac{1}{\rho_2} & 0 & 0 & \frac{1}{\rho_2} & (a,2) \\ 0 & -\frac{1}{a_1} - \frac{1}{\rho_1} & \frac{1}{\rho_1} & 0 & (a,1) \\ 0 & \frac{1}{\rho_1} & -\frac{1}{\rho_1} & e_{12} & (c,1) \\ \frac{1}{\rho_2} & 0 & e_{21} & e_{22}^{*} - \frac{1}{\rho_2} & (b,2) \end{vmatrix}$$

Bei der Berechnung der Determinanten $\mathcal{N}$ und u_{iv} ergibt sich, s sämtliche Determinanten mit dem Faktor $\frac{1}{a_1 \cdot a_2 \cdot \rho_1 \cdot \rho_2}$ behaftet d. Dieser Faktor kann fortgelassen werden, da bei den weiteren hnungen immer nur die Verhältnisse der zu berechnenden Determi- ten benötigt werden. Als Ergebnis der Rechnung erhält man dann liesslich die folgenden Formeln:

$$\mathcal{N} = 2 - (1+\rho_2)(e_{12}\, e_{21} + e_{22}^{*})$$

$$\frac{\breve{u}_{11}}{a_1} = 2 - (1+\rho_2)(\rho_1 e_{12}\, e_{21} + e_{22}^{*}) \qquad \frac{\breve{u}_{12}}{a_2} = (1-\rho_1)\, e_{12} \tag{96}$$

$$\frac{\breve{u}_{21}}{a_1} = (1-\rho_2)\, e_{21} \qquad \frac{\breve{u}_{22}}{a_2} = 1 - \rho_2 (e_{12}\, e_{21} + e_{22}^{*})$$

Im Anschluss hieran seien noch die - besonders einfachen - Formeln angegeben, welche man für zwei unendlich lange Elektroden erhält. In diesem Fall können die Wärmeleitungsglieder $Q_1 = Q_2 =$ gesetzt werden. Nimmt man ferner noch an, dass der Anode keinerl Energie von aussen zugeführt wird, so werden nach (25) die beide Hilfsenergien:

$$V_1 = W_1 \qquad V_2 = 0$$

und man erhält aus (67) unter Benutzung der Formeln (95) für die Koeffizienten der unendlich langen Röhre die folgenden beiden Gl chungen für die von den Elektroden ausgestrahlten Energien:

$$E_1 = \left[1 + \frac{r_1}{r_2} a_1 \left(\frac{\delta_2}{\delta_2} - 1\right)\right] \cdot W_1 \qquad (96a)$$

$$E_2 = W_1$$

Weiterhin betrachten wir den Fall der Eingitterröhre

n = 3:

Für die Koeffizienten erhält man in diesem Fall die folgen den Formeln:

$$e_{21}^{\infty} = \nu_2 \qquad e_{31}^{\infty} = (1 - \nu_2)$$

$$e_{12}^{\infty} = \frac{r_1}{r_2} \qquad e_{22}^{*\infty} = \left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right)\nu_2 \qquad e_{32}^{\infty} = 1$$

$$e_{13}^{\infty} = \frac{r_1}{r_3}(1 - \nu_2) \qquad e_{23}^{\infty} = \frac{r_2}{r_3}\nu_2 \qquad e_{32}^{*\infty} = \left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right)(1 - \nu_2)$$

$$e_{23}^{*\infty} = \frac{r_2 - r_1}{r_3}\nu_2(1 - \nu_2) \qquad e_{33}^{*\infty} = 1 - \frac{r_1}{r_3} - \frac{r_2 - r_1}{r_3}\nu_2(2 - \nu_2)$$

Hierin ist nach (32):

$$\nu_2 = \frac{\delta_2}{\delta_2} + \frac{m_2 \delta_2'}{2\pi r_2} \cdot \left(1 - \frac{\delta_2}{\delta_2}\right) \qquad (97a)$$

Die Formeln gelten für eine massive Anode. Bei einer Gazeanode sind sämtliche Koeffizienten, welche den vorderen Index 3 besitzen, mit dem Verhältnis ν_3 der vom Gazedraht eingenommenen Fläche zur gesamten Anodenfläche zu multiplizieren.

Die Systemdeterminante (94) wird im Fall n = 3:

$$\mathcal{N} = \begin{array}{c|ccccccc|l} & E_3 & E_2 & E_1 & E_2^{(ra)} & E_1^{(ra)} & E_2^{(ri)} & E_3^{(ri)} & \\ \hline & -\frac{2}{a_3}-\frac{1}{\rho_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho_3} & (a,3) \\ & 0 & -\frac{2}{a_2}-\frac{2}{\rho_2} & 0 & \frac{1}{\rho_2} & 0 & \frac{1}{\rho_2} & 0 & (a,2) \\ & 0 & 0 & -\frac{1}{a_1}-\frac{1}{\rho_1} & 0 & \frac{1}{\rho_1} & 0 & 0 & (a,1) \\ & 0 & \frac{1}{\rho_2} & 0 & -\frac{1}{\rho_2} & 0 & 0 & e_{23} & (c,2) \\ & 0 & 0 & \frac{1}{\rho_1} & 0 & -\frac{1}{\rho_1} & e_{12} & e_{13} & (c,1) \\ & 0 & \frac{1}{\rho_2} & 0 & 0 & e_{21} & e_{22}^{*}-\frac{1}{\rho_2} & e_{23}^{*} & (b,2) \\ & \frac{1}{\rho_3} & 0 & 0 & e_{32} & e_{31} & e_{32}^{*} & e_{33}^{*}-\frac{1}{\rho_3} & (b,3) \end{array}$$

Hieraus erhält man, wenn man ebenso wie im Fall n = 2 einen bedeutungslosen Faktor fortlässt, für die Determinanten $\mathcal{N}$ und u_{iv} die folgenden Formeln:

$$\mathcal{N} = 4-(1+\rho_3)\left[(x_1+x_2)\rho_2+(y_1+y_2)\right]-2(1+\rho_2)(e_{12}e_{21}+e_{22}^{*})$$

$$\frac{u_{11}}{a_1} = 4-(1+\rho_3)\left[(\rho_1 x_1+x_2)\rho_2+(\rho_1 y_1+y_2)\right]-2(1+\rho_2)(\rho_1 e_{12}e_{21}+e_{22}^{*})$$

$$\frac{u_{12}}{a_2} = (1-\rho_1)\left\{2e_{12}-\rho_2(1+\rho_3)e_{32}\left[e_{13}e_{22}^{*}+e_{12}(e_{23}-e_{23}^{*})\right]-(1+\rho_3)\left[e_{12}e_{33}^{*}-e_{13}(e_{32}+e_{32}^{*})\right]\right\}$$

$$\frac{u_{13}}{a_3} = (1-\rho_1)\left\{e_{13}(2-e_{22}^{*})+e_{12}(e_{23}+e_{23}^{*})-\rho_2\left[e_{12}(e_{23}-e_{23}^{**})+e_{13}e_{22}^{*}\right]\right\}$$

$$\frac{u_{21}}{a_1} = (1-\rho_2)\left[2e_{21}-(1+\rho_3)(\rho_2 x_1+x_2)\right] \qquad (98)$$

$$\frac{u_{22}}{a_2} = 2-(1+\rho_3)(t_0+t_1\rho_2+t_2\rho_2^{2})-2\rho_2(e_{12}e_{21}+e_{22}^{*})$$

$$\frac{u_{23}}{a_3} = (1-\rho_2)\left[(e_{23}+e_{23}^{*})+e_{13}e_{21}-\rho_2 e_{23}(e_{12}e_{21}+e_{22}^{*})\right]$$

Dabei wurde zur Abkürzung gesetzt:

$$x_1 = e_{12}\,e_{31}(e_{23}^{*} - e_{23}) + e_{13}\,e_{21}(e_{32}^{*} - e_{32}) - e_{12}\,e_{21}(e_{33}^{*} + 2\,e_{23}\,e_{32}) - e_{22}^{*}\,e_{13}\,e_{31}$$

$$x_2 = (e_{23}^{*} - e_{23})(e_{32}^{*} - e_{32}) - e_{22}^{*}(e_{33}^{*} + 2\,e_{23}\,e_{32})$$

$$y_1 = e_{12}\,e_{31}(e_{23} + e_{23}^{*}) + e_{13}\,e_{21}(e_{32} + e_{32}^{*}) + e_{13}\,e_{31}(2 - e_{22}^{*}) - e_{33}^{*}\,e_{12}\,e_{21}$$

$$y_2 = (e_{23} + e_{23}^{*})(e_{32} + e_{32}^{*}) + e_{33}^{*}(2 - e_{22}^{*})$$

$$z_1 = e_{23}\left[e_{31}\,e_{22}^{*} + e_{21}(e_{32} - e_{32}^{*})\right] \qquad (98a)$$

$$z_2 = e_{21}\,e_{33}^{*} - e_{31}(e_{23} + e_{23}^{*})$$

$$t_0 = e_{13}\,e_{31} + e_{33}^{*}$$

$$t_1 = e_{12}\,e_{23}^{*}\,e_{31} + e_{13}\,e_{21}\,e_{32}^{*} + e_{23}^{*}\,e_{32}^{*} + e_{23}\,e_{32} - e_{33}^{*}(e_{12}\,e_{21} + e_{22}^{*}) - e_{22}^{*}\,e_{13}\,e_{31}$$

$$t_2 = -e_{23}\,e_{32}\,(e_{12}\,e_{21} + e_{22}^{*})$$

Die Determinanten u_{3v} wurden nicht berechnet, da die Grösse der Anodentemperatur, zu deren Berechnung diese Determinanten erforderlich wären, bei der Dreielektrodenröhre nicht interessiert.

Bei Röhren mit mehr als 3 Elektroden wird, wie bereits erwähnt, die Aufstellung allgemeiner Formeln zu unübersichtlich, so dass es zweckmässig ist, in diesem Fall sowohl die Koeffizienten als auch die Determinanten erst nach dem Einsetzen der betreffend Zahlenwerte zu berechnen. Zur Berechnung der Determinanten benutzt man jedoch statt der bisher angewandten Entwicklung nach Unterdeterminanten besser ein anders Verfahren, das im folgenden kurz angegeben werden soll.

Bei diesem Verfahren wird die Ordnung der zu berechnenden Determinante schrittweise um je eine Einheit reduziert. Zu diesem Zweck muss man zunächst alle Elemente der ersten Spalte der Determinante mit Ausnahme des obersten zu Null machen, indem man unter Benutzung des oben angeführten Satzes aus der Determinantentheor geeignete Vielfache der ersten Zeile von den übrigen Zeilen abzie Wenn also beispielsweise die Systemdeterminante (94) berechnet werden soll, deren Elemente ganz allgemein mit b_{ik} bezeichnet werden mögen, so hat man, um zunächst das zweite Element der ersten Spalte zum Verschwinden zu bringen, das $\frac{b_{21}}{b_{11}}$fache der ersten Zeile von der zweiten Zeile abzuziehen. Verfährt man entsprechend mit allen

rigen Zeilen, so erhält man auf diese Weise schliesslich eine geformte Determinante, welche der gesuchten Determinante gleich t, bei welcher jedoch sämtliche Elemente der ersten Spalte mit snahme des obersten Null sind. Die Ordnung dieser so umgeformten terminante kann nun, wie beabsichigt, dadurch um eine Einheit rmindert werden, dass die Determinantenach den Elementen der er- en Spalte entwickelt wird. Die genannte Dterminante wird dann eich dem Produkt aus dem - ungeändert gebliebenen - Element b_{11} d der zugehörigen, in der Ordnung um eine Einheit verminderten, terdeterminante,welche durch Streichen der ersten Spalte und der sten Zeile aus der ungeformten Determinante entsteht. Die so er- ltene Unterdeterminante wird dann in der gleichen Weise wie vor- r die gegebene Determinante behandelt und dieses Verfahren solan- fortgesetzt, bis nach 3 n - 4 Schritten nur noch eine Determi- nte zweiter Ordnung übrig bleibt. Diese kann schliesslich in be- nnter Weise durch kreuzweises Multiplizieren ihrer Elemente be- chnet werden.

Die bei mehr als drei Elektroden notwendigen zahlenmässigen chnungen lassen sich weiterhin noch dadurch erheblich vereinfachen, ss die Berechnung der Unterdeterminanten u_{iv} weitgehend auf die eben geschilderte Ermittlung der Systemdeterminante zurückgeführt rd. Um dies zu beweisen, müssen wir noch einmal auf die bei der nführung der u_{iv} angestellten Überlegungen (vergl. § 22) zurück- mmen. Es wurden dort zunächst die Zählerdeterminanten Z_i einge- rt, welche dadurch erhalten werden, dass in der Systemdetermi- nte (64) die i-te Spalte durch die Spalte der absoluten Glieder $\frac{V_2}{a_2}$ ..... $\frac{V_n}{a_n}$, 0 ..... 0 ersetzt wird. Aus diesen Z_i ergeben ch dann die u_{iv} ebenso wie aus $\mathfrak{A}$ durch Streichen der i-ten Spal- und der v-ten Zeile, und zwar ist nach Gleichung (66):

$$Z_i = \sum_{v=1}^{n} \frac{u_{iv}}{a_v} \cdot V_v$$

tt nun die zu einem bestimmten Wert von i gehörigen Unterdeter- anten u_{iv} alle einzeln durch Streichen der i-ten Spalte und der en Zeile (v = 1.....n) in $\mathfrak{A}$ auszurechnen, kann man einfacher ächst die zugehörige Zählerdeterminante Z_i in der oben geschil- rten Weise ermitteln. Bei dieser Ermittlung erhält man nämlich, die Elemente ein und derselben Spalte lediglich zueinander ad- ert bzw. subtrahiert werden, für Z_i eine lineare Funktion der in i-ten Spalten enthaltenen Hilfsenergien V_v

$$Z_i = \sum_{v=1}^{n} j_v V_v$$

den beiden zuletzt hingeschriebenen Gleichungen folgt nun, dass:

$$j_v = \frac{u_{iv}}{a_v}$$

sein muss. Die gesuchten Unterdeterminanten u_{iv} ergeben sich al
dadurch, dass die Faktoren $\mathcal{J}_v$ der Hilfsenergien V_v mit dem Abs
tionsvermögen a_v multipliziert werden. Damit ist gezeigt worde
dass sich die Unterdeterminanten u_{iv} in bequemer Weise aus den
ermitteln lassen.

Weiterhin kann nun die Berechnung der Zählerdeterminanten
Z_i in dem am häufigsten vorkommenden Fall, dass lediglich die Te
peratur des Steuergitters (k = 2) zu ermitteln ist, weitgehend
die Ermittlung der Systemdeterminante $\mathcal{V}$ zurückgeführt werden.
Bestimmung der beiden in diesem Fall auftretenden Zählerdetermi
ten Z_1 und Z_2 müssen dann, bevor mit der Rechnung begonnen wird
die zu den Unbekannten E_1 und E_2 gehörigen Spalten in (94) auf
rechte Seite der Determinante gebracht werden. Ausserdem muss r
neben der Determinante noch die aus den $\frac{V_v}{a_v}$ gebildete Spalte de
absoluten Glieder, so wie es in (94) geschehen ist, hingeschrie
werden. Durch diese Anordnung der Spalten wird erreicht, dass b
der schrittweisen Reduktion der Determinante $\mathcal{V}$, welche in der
vorhin angegebenen Weise vorzunehmen ist, alle Rechnungen bis z
(3 n - 4)ten Schritt einschliesslich durch die Elemente der zu
E_1 und E_2 gehörigen Spalten gar nicht beeinflusst werden. Diese
Rechnungen würden also genau so verlaufen, wenn man eine dieser
Spalten durch die hinzugefügte Spalte der absoluten Glieder ers
würde. Führt man daher die Reduktion von (94) nicht nur für die
n Spalten dieser Determinante, sondern gleichzeitig auch für di
Spalte der absoluten Glieder durch, so erhält man nach Ausführu
der 3 n - 4 Schritte drei Spalten mit je 2 Elementen, für welch
das Bildungsgesetz der Zählerdeterminanten Z_1 und Z_2 ebenso gel
muss wie für die ursprüngliche Determinante (94). Die ersten be
den Spalten liefern also dann die Systemdeterminante $\mathcal{V}$, währen
die Zählerdeterminanten sich in entsprechender Weise wie aus (94
dadurch ergeben, dass eine der beiden ersten Spalten durch die
dritte ersetzt wird. Die so erhaltenen Determinanten zweiter Or
nung können in bekannter Weise leicht ausgerechnet werden, so d
zur Ermittlung der Temperatur des Steuergitters in der Hauptsac
also nur eine einzige Determinantenrechnung durchzuführen ist.

Nachdem so gezeigt worden ist, wie die zahlenmässige Berec
nung der Determinanten auf die einfachste Weise vorgenommen wer
kann, sollen im folgenden jetzt noch einige Formeln spezialisie
werden, welche zur Integration der Wärmeleitungsgleichung (60)
nötigt werden. Diese Integration ist in § 23 ausführlich behande
worden, wobei allerdings die durch (74) definierte Wärmeableitu
funktion $\mathcal{G}(T, {}^{(k)}T_a)$, welche die vom Gitterende über Zuführung
Halterung in der Zeiteinheit abgeleitete Wärmemenge angibt, als
kannt vorausgesetzt wurde. Die genaue Form der Funktion $\mathcal{G}$ konnte
damals noch nicht angegeben werden, weil dazu spezielle Annahme
über die Beschaffenheit der Gitterzuführung und Halterung gemac
werden müssen. Diese speziellen Annahmen sollen nun im folgende
behandelt werden. Dabei sind für die praktischen Anwendungen zw
Fälle besonders wichtig.

Im ersten Fall wird vorausgesetzt, dass die gesamte abgel
tete Wärmemenge Q allein durch die metallische Gitterzuführung

ussen abfliesst. Dieser Fall ist dann verwirklicht, wenn, wie es ft in technischen Röhren der Fall ist, die Zuführung gleichzeitig ur Halterung des Gitters dient oder wenn die etwa neben der Zuührung noch vorhandene Halterung, wie z.B. bei der Hexode in der rsten Ausführungsart, aus einem Material sehr schlechter Wärmeleitähigkeit besteht. Ist dann die Wärmeleitfähigkeit und der Querchnitt der Zuführung nicht allzu klein, so wird die gesamte vom itter abgeleitete Wärmemenge am Gitterende in die Zuführung fliesen und in der Hauptsache auch über diese Zuführung den Aussenraum er Röhre erreichen. Diejenigen Teilbeträge der abgeleiteten Wäremenge, welche von der Zuführung in das Vakuum der Röhre abetrahlt oder an das Glas des Röhrenfusses abgegeben werden, können ann vernachlässigt werden. Die abgeleitete Wärmemenge Q wird dann us der Formel für die stationäre lineare Wärmeleitung erhalten, nd zwar ergibt sich für Q der Ausdruck:

$$Q = \mathcal{G}(T^{(\ell)}, T_a) = g \cdot (T^{(\ell)} - T_a) \qquad (99a)$$

obei g ein Faktor ist, der aus den Abmessungen und der Wärmeleitähigkeit der Zuführung zu ermitteln ist.

Im zweiten der beiden Fälle wird vorausgesetzt, dass die geamte vom Gitter fortgeführte Wärmemenge am Gitterende in das Vakum abgestrahlt wird. Dieser Fall ist dann verwirklicht, wenn, wie .B. bei der Hexode in der neueren Ausführungsart, am Ende der Gitrstreben geschwärzte Bleche (Abstrahlbleche oder Kühlflügel)befestigt sind. Dann kann die von der Zuführung abgeleitete Wärmeenge im allgemeinen gegenüber der starken Ausstrahlung dieser leche vernachlässigt werden, und die gesamte dem Gitter in der eiteinheit entzogene Wärmemenge ergibt sich unter der Annahme, ass die Bleche vollkommen schwarz strahlen, aus dem Stefan Boltzannschen Gesetz zu:

$$Q = \mathcal{G}(T^{(\ell)}, T_a) = \sigma \cdot O^{(a)} \cdot (T^{(\ell)^4} - T_a^4) \qquad (99b)$$

σ die Strahlungskonstante, $O^{(a)}$ die Oberfläche der Abstrahlbleche).

Mit Hilfe der beiden Gleichungen (99a bzw. 99b) kann nun eiterhin leicht die zugehörige in §23 bei der Einführung der Hilfsemperatur $T^{(\ell)^*}$ benutzte Auflösungsfunktion $\mathcal{G}$ berechnet werden. etzt man z.B. (99a) in (85) ein und lösst die so entstandene Gleihung nach der Endtemperatur $T^{(\ell)}$ auf, so wird:

$$\overline{\mathcal{G}} = T_a + \frac{1}{g}\,\mathcal{P}(t) - \frac{x_1(t)}{\ell \cdot g} \cdot H$$

benso wird unter Benutzung von (99b):

$$\overline{\mathcal{G}} = \sqrt[4]{T_a^4 + \frac{1}{\sigma O^{(a)}} \cdot \mathcal{P}(t) - \frac{x_1(t)}{\ell \cdot \sigma O^{(a)}} \cdot H}$$

Aus diesen beiden Funktionen erhält man schliesslich dadurch, ass man das unbekannte Glied mit x_1 (t) fortlässt und ausserdem ür die Funktion $\mathcal{P}$ (t) den Wert (84) einsetzt, die zur Berechnung er Hilfstemperatur $T^{(\ell)^*}(t)$ dienende Funktion $\Omega\left[T^{(\max)}(t)\right]$. s wird also, falls rein metallische Wärmeableitung vorliegt:

$$T^{(\ell)*}(t) = \Omega\left[T^{(max)}(t)\right] = T_a + \frac{1}{g}\cdot H - \frac{\eta\,\sigma^{(T)}}{\ell\cdot g}\cdot \int_{T^{(max)}(t)}^{T^{(\ell)}(t)} \frac{T^{\xi}\,dT}{\frac{dT(x,t)}{dx}} \qquad (100$$

Wird dagegen die gesamte abgeleitete Wärmemenge abgestrahlt, so ist:

$$T^{(\ell)*}(t) = \Omega\left[T^{(max)}(t)\right] = \sqrt[4]{T_a^{4} + \frac{1}{\sigma^{(a)}}\cdot H - \frac{\eta\,\sigma^{(T)}}{\ell\cdot\sigma^{(a)}}\cdot \int_{T^{(max)}(t)}^{T^{(\ell)}(t)} \frac{T^{\xi}\,dT}{\frac{dT(x,t)}{dx}}}$$

Für das in diesen beiden Gleichungen enthaltene Integral kann unter Umständen der Näherungswert (90) benutzt werden. Die zu bestimmten Werten von $T^{(max)}(t)$ gehörigen Werte der Endtemperatur $T^{(\ell)}(t)$ erhält man mit Hilfe der Gleichung (81).

C) Die experimentelle Prüfung der Voraussetzungen des Verfahrens

§ 26 Die Grundlagen der experimentellen Prüfung

Damit die Elektrodentemperaturen einer Elektronenröhre mittels des in Teil A angegebenen Verfahrens ermittelt werden konnten mussten, wie in Teil B ausgeführt wurde, eine Reihe von Voraussetzungen angenommen werden. Das Erfülltsein dieser Voraussetzungen konnte nicht streng bewiesen werden; es wurde vielmehr nur wahrscheinlich gemacht, dass durch sie keine wesentliche Fälschung der tatsächlich vorliegenden Verhältnisse eintritt. Infolgedessen erscheint es notwendig, zur Nachprüfung der angenommenen Voraussetzungen das Experiment zur Hilfe zu nehmen. Bevor jedoch hierauf näher eingegangen wird, sollen die nachzuprüfenden Voraussetzungen zunächst noch einmal zusammengestellt werden;

1. Damit das in Teil A angegebene allgemeine Verfahren auf die Elektronenröhre übertragen werden konnte, musste statt des wirklich vorhandenen realen Gitters mit seiner stetige Änderung des Temperaturgradienten ein idealisiertes Gitter eingeführt werden, bei welchem der Temperaturgradient sich beim Übergang von der Innen- zur Aussenseite sprunghaft ändert. Dabei musste vorausgesetzt werden, dass dieses ide alisierte Gitter dieselben Strahlungseigenschaften besitzt wie das reale, so dass die aufgefangene Strahlungsmenge in beiden Fällen gleich gross ist. (vergl. § 14 und § 21)
2. Damit eine allgemeine Berechnung der Koeffizienten des Grundgleichungssystems durchgeführt werden konnte, musste ferner vorausgesetzt werden, dass die Gitter "fein unterteilt" sind und dass infolgedessen die Einschaltung eines solchen Gitters in den Strahlengang nur eine Intensitäts-

schwächung, dagegen keine Änderung in der Verteilung der Strahlungsdichte der auffallenden Strahlung hervorruft (vergl. § 17).

3. Damit das in Teil A angegebene Verfahren auch dann noch angewandt werden konnte, wenn den Gittern der Röhre ein wesentlicher Energiebetrag durch Wärmeleitung entzogen wird, musste weiterhin vorausgesetzt werden, dass die Störung vernachlässigt werden kann, die in diesem Fall durch die Nichterfüllung der beiden Grundbedingungen des Verfahrens- nahezu konstante Temperatur und nahezu konstanter Normalgradient längs der Gitteroberfläche-hervorgerufen wird (vergl. § 22).

4. Damit die unter dem Einfluss der Wärmeleitung im Gitter entstehende Temperaturverteilung rechnerisch erfasst werden konnte, musste ausserdem noch vorausgesetzt werden, dass die Betrachtung des Wärmeleitungsvorganges auf die Gitterstreben beschränkt bleiben kann und das jede Windung des Gitters überall die gleiche Temperatur besitzt wie die Streben an der Schweisstelle mit der betreffenden Windung (vergl. § 21).

5. Schliesslich musste zur Ermittlung der Temperaturverteilung mittels der Wärmeleitungsgleichung vorausgesetzt werden, dass die Temperaturverhältnisse sich nicht ändern, wenn man, statt die Abhängigkeit der zugeführten Energie von der Koordinate in der Längsrichtung des Gitters zu berücksichtigen, einen für alle Gitterpunkte gleichen Mittelwert dieser Energie einführt (vergl. § 21).

Zur Nachprüfung dieser Voraussetzungen wird man die berechten Werte der Gittertemperatur mit gemessenen Werten vergleichen ssen, um so zahlenmässige Angaben über die Grösse der Abweichun- n zwischen Theorie und Experiment zu erhalten. Dabei wird man die perimentell zu untersuchenden Röhren so aufbauen, dass die einlnen Voraussetzungen möglichst nacheinander geprüft werden könn. In welcher Weise das geschehen kann, wird später ausführlich schildert werden.

Zum Vergleich der rechnerisch und experimentell erhaltenen rte könnte man von der der Kathode zugeführten elektrisch gemesnen Leistung W_1 ausgehen und für bestimmte Werte dieser Leistung e Elektrodentemperaturen sowohl berechnen als auch messen. Bei eser Art des Vorgehens würde indessen die rechnerisch nicht sehr nau zu erfassende, von der Kathode abgeleitete Wärmemenge in die chnungen eingehen. Um die dadurch verursachte Ungenauigkeit in r rechnerischen Ermittlung zu vermeiden, ist es vorzuziehen, als sgangspunkt für den Vergleich die Kathodentemperatur T_1 zu wählen. e Rechnungen, die dann zur Ermittlung der Elektrodentemperaturen rchzuführen sind, sind in § 25 zusammenfassend geschildert worden. e in diesem Fall erforderliche Messung der Kathodentemperatur nn mit Hilfe eines Pyrometers genügend genau vorgenommen werden.

Die Anwendung der im vorigen Paragraphen angegebenen Formeln tzt die Kenntnis der Abmessungen und des Reflexions- bzw. Absorponsvermögens der Elektroden voraus. Ausserdem muss zur Berechnung r Temperatur einer Elektrode auch noch das für diese Elektrode ltende Ausstrahlungsgesetz, welches die in der Zeiteinheit ausge-

strahlte Gesamtenergie in Abhängigkeit von der absoluten Temperatu darstellt, bekannt sein. Während nun die Elektrodenabmessungen ei ner gegebenen Röhre leicht festgestellt werden können, ist es vie weniger einfach, hinreichend genaue Werte für das Reflexionsvermö gen und für die Ausstrahlung anzugeben. Im allgemeinen wird man sich mit nur annäherungsweise gültigen Werten für diese Grössen be gnügen müssen. Die Gründe hierfür sollen im folgenden besprochen werden.

Das Reflexionsvermögen der stets aus Metall (Ni, Mo oder W bestehenden Elektroden ist wie das eines jeden Metalles stark von der Wellenlänge der auftreffenden Strahlung abhängig, und zwar nimmt es stets mit wachsender Wellenlänge zu. Da nun die auf die Elektroden auftreffende Strahlung einen grossen Wellenlängenbereic (von $\lambda \sim 0{,}5\mu$ bis $\lambda \sim 10\mu$) umfasst, muss für die Rechnung ein Mi telwert des Reflexionsvermögens benutzt werden. Die genaue Berech nung dieses Mittelwertes für eine bestimmte Elektrode müsste unte Zugrundelegung der spektralen Verteilung der auf diese Elektrode auftreffenden Strahlung vorgenommen werden. Die Ermittlung dieser Verteilung ist aber praktisch deswegen nicht möglich, weil die be trachtete Elektrode ausser von der Kathode, deren Strahlungsverte lung auf Grund der bekannten Kathodentemperatur festgestellt werde kann, auch von allen übrigen Elektroden her bestrahlt wird. Über die von der Temperatur abhängige Verteilung der Strahlung der übri gen Elektroden kann nun aber keine genaue Aussage gemacht werden, da ja die Temperatur dieser Elektroden erst ermittelt werden soll. Als erschwerend kommt weiterhin noch hinzu, dass die Strahlungsver teilung sich infolge des veränderlichen Reflexionsvermögens bei je der Reflexion ändert, so dass das mittlere Reflexionsvermögen auch noch von der Ordnung der Reflexion abhängig wird.

Infolge dieser sehr unübersichtlichen Verhältnisse kann also ein genauer Mittelwert für das Reflexionsvermögen nicht bestimmt werden, so dass man versuchen muss, einen angenähert richtigen Wer zu finden. Ein solcher Wert ergibt sich auf Grund der Überlegung dass die - direkt oder indirekt auftreffende - Strahlung der Katho de den Hauptbestandteil der auf eine Elektrode auftreffenden Strah lung bildet. Infolgesessen wird man einen angenähert richtigen Mit telwert für das Reflexionsvermögen erhalten, wenn man den zu der jenigen Wellenlänge gehörigen Wert benutzt, bei welcher die Kathod die maximale Energie ausstrahlt. Diese Wellenlänge wird für jede Kathodentemperatur T_1 mittels des Wienschen Verschiebungsgesetzes erhalten, so dass aus der bekannten Abhängigkeit des Reflexionsver mögens von der Wellenlänge der soeben eingeführte Mittelwert leich bestimmt werden kann.

Für die im folgenden allein als Elektrodenmaterial verwende ten Metalle, Nickel und Moybdän, erhält man auf diese Weise bei ei ner Kathodentemperatur von rund 1000° ab. den Wert $\varrho_1 = 0{,}85$ für das Reflexionsvermögen. Die Änderung dieses Wertes mit der Kathode temperatur ist innerhalb des Temperaturbereiches, welcher bei in direkt geheizten Röhren benutzt wird, so gering, dass sie nicht be rücksicht zu werden braucht.

Der so gefundene Mittelwert des Reflexionsvermögens stellt natürlich eine verhältnismässig grobe Annäherung dar. Infolgedesse wird das Ergebnis der unter Benutzung dieses Näherungswertes durch geführten Rechnung mit einem Fehler behaftet sein. Die Grösse dies

hlers lässt sich, da der genaue Wert des Reflexionsvermögens
cht bekannt ist, nur experimentell bestimmen. Bevor jedoch auf
e zu diesem Zweck vorgenommenen Messungen eingegangen wird, soll
st noch auf das Ausstrahlungsgesetz eingegangen werden, welches
enfalls nur annäherungsweise bestimmt werden kann.

Man wird, um sich eigene Messungen zu ersparen, für dieses
sstrahlungsgesetz, dessen Kenntnis nach Gleichung (1) zur Berech-
ng der Elektrodentemperaturen erforderlich ist, die Ergebnisse
üherer Arbeiten benutzen. Nun ist bekanntlich die Ausstrahlung
cht nur von der Art des Materials, sondern auch in starkem Masse
n den Eigenschaften der strahlenden Oberfläche abhängig. Da diese
genschaften ziemlichen Schwankungen unterliegen, so weichen die
n den verschiedenen Beobachtern an ein und demselben Material ge-
ndenen Ergebnisse bereits mehr oder weniger stark voneinander ab.
folgedessen wird man erst recht nicht erwarten dürfen, dass ein
roh frühere Messungen an dem für die Elektroden benutzten Mate-
al gefundenes Ausstrahlungsgesetz den tatsächlich vorliegenden
rhältnissen vollkommen entspricht. Trotzdem wird man der Rech-
ng dieses nur angenähert gültige Gesetz zugrundelegen können, wenn
e sich dadurch ergebenden Abweichungen nicht allzu gross sind.
n erspart sich dadurch die umfangreiche Arbeit, welche die Auf-
ellung des Ausstrahlungsgesetzes erfordert.

Für die beiden hier benutzten Metalle, Nickel bzw. Molybdän,
hält man aus von Suydam 7) bzw. Worthing 8) experimentell ermit-
lten Kurven die beiden folgenden Ausstrahlungsgesetze:

$$E_i^{(Ni)} = O_i \cdot 8{,}15 \cdot 10^{-16} \cdot T_i^{5{,}01} \quad \text{Watt} \qquad (101)$$

$$E_i^{(Mo)} = O_i \cdot 2{,}63 \cdot 10^{-16} \cdot T_i^{5{,}11} \quad \text{Watt} \qquad (102)$$

Die Abweichungen, die infolge der nur ungenau bekannten Werte
r das Reflexionsvermögen und für die Ausstrahlung zwischen den
rechneten und gemessenen Temperaturen auftreten, sind natürlich
ch dann vorhanden, wenn keine der zu Anfang dieses Paragraphen
sammengestellten Voraussetzungen benutzt wird. Es muss daher die
össe dieser Abweichungen zunächst festgestellt werden, ehe die
gegebenen Voraussetzungen einer Nachprüfung unterzogen werden
nnen.

Die Feststellung der genannten Abweichungen muss natürlich
perimentell erfolgen, und zwar geschieht das am einfachsten da-
roh, dass für eine Zweielektrodenröhre die gemessene Anodentempe-
tur mit der berechneten verglichen wird. Zur Berechnung der Anoden-
mperatur in einem Zweielektrodensystem ist nämlich keine der oben
gegebenen Voraussetzungen notwendig, ja es kann in diesem Falle
gar, wie bereits oben erwähnt, das in § 4 geschilderte alte
rfahren benutzt werden. Infolgedessen fallen etwaige Abweichungen,
e in diesem Falle zwischen den berechneten und den gemessenen Tem-
raturwerten festgestellt werden, nicht dem Verfahren als solchem
r Last, sondern sind allein durch die ungenaue Kenntnis der bei
r Anwendung dieses Verfahrens benötigten Werte für die Gesamt-

---

Geiger-Scheel, Hdb. d. Phys. XXI, S. 227

Geiger-Scheel, Hdb. d. Phys. XXI, S. 229

strahlung bzw. das Reflexionsvermögen verursacht. Die Messung der Anodentemperatur einer Zweielektrodenröhre ermöglicht es also, den Einfluss der Näherungswerte der angegebenen Grössen auf das Ergebnis der Rechnung festzustellen. Dementsprechend soll im folgenden zunächst auf diese Messung eingegangen werden.

§ 27 Die Messung der Anodentemperatur an einer Zweielektrodenröhre

Für die soeben angedeutete Messung der Anodentemperatur wird man die Versuchsanordnung so gestalten, dass die beiden für das abgeleitete Verfahren geltenden Grundbedingungen (vergl. § 12) soweit wie irgend möglich erfüllt sind. Infolgedessen muss das Auftreten von Temperaturunterschieden auf der Anode und Kathode möglichst vermieden werden. Ferner wird man versuchen, die Wärmeableitung von der Anode, welche sich rechnerisch nie ganz genau erfassen lässt, möglichst klein zu machen. Die unter Berücksichtigung dieser Forderungen gebaute Elektrodenanordnung ist in Abb.12 wiedergegeben. Die Anode dieser Anordnung besteht aus drei übereinander angeordneten Teilen aus Nickelblech, welche unter Zwischenschaltung von Glasperlen an den Haltestreben befestigt sind. Durch die Dreiteilung der Anode wird erreicht, dass das ausschliesslich zur Messung verwendete Mittelstück der Anode keinen Temperaturabfall nach den Enden zu aufweist. Ausserdem wird dadurch erzielt, dass dieses Mittelstück den weitaus grösten Teil seiner Energie von dem mittleren Teil der Kathode erhält, welcher sich ebenfalls auf konstanter Temperatur befindet. Durch die Halterung der Anode mittels Glasperlen wird die Wärmeleitung auf das geringst mögliche Mass herabgesetzt. Die trotzdem noch durch Wärmeleitung verloren gehende Wärmemenge wurde bei der Rechnung durch ein Korrektionsglied berücksichtigt.

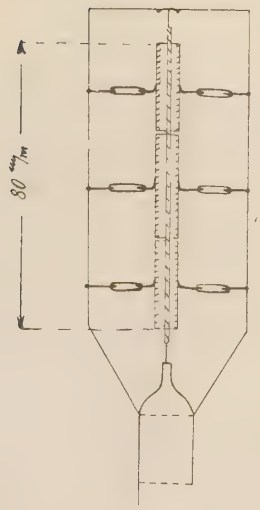


Abb 12

Zur Messung der Anodentemperatur wurden je ein dünner Platin- und Platin-Rhodium-Draht in geringe Abstand voneinander auf die Anode aufgeschweisst und dieses Thermoelement durch den Glasfuss nach aussen herausgeführt. Die Wärmeableitung durch diese dünnen Drähte ist so gering, dass sie vernachlässigt werden kann. Vor der Messung wurde die Anode mittels Hochfrequenz auf hell Rotglut erhitzt, um eine möglichst reine Metalloberfläche zu erhalten.

Als Oberflächenschicht der indirekt geheizten Kathode wurde ein Material gewählt, das möglich grau strahlt, weil dann die Ausstrahlung dieses Materials mittels des Stefan Boltzmannschen Gesetzes in einfacher Weise berechnet werden kann. Als geeignet erwies sich Uranoxyd, das in Pasteform

uf die Kathode aufgetragen wurde. Die schwarze Temperatur der athode wurde mittels eines Pyrometers durch 5 in gleichen Abstän-en voneinander im mittleren Teil der Anode vorhandene Löcher ge-essen. Aus dieser schwarzen Temperatur $T_1^{(s)}$ erhält man die von er Kathode ausgestrahlte Energie E_1 mit Hilfe des Stefan Boltz-annschen Gesetzes zu:

$$E_1 = \sigma \cdot Q_1 \cdot T_1^{(s)4} \qquad (103)$$

as Reflexionsvermögen der Uranoxydschicht, das für die Berechnung ekannt sein muss, besitzt den Wert 0,2 9).

Zur Berechnung der Temperatur des mittleren Anodenteiles önnen infolge der Aufteilung der Anode in drei Teilstücke die ein-achen, für unendlich lange Elektroden gültigen Formeln (96a) be-utzt werden. Aus diesen beiden Formeln erhält man durch Eliminie-ung von W_1 eine Beziehung zwischen den ausgestrahlten Energien $_1$ und E_2. Führt man für diese Energien die aus dem Ausstrahlungs-esetz sich ergebenden Temperaturen T_1 bzw. T_2 ein, so gewinnt man ie gesuchte Gleichung zwischen der Kathodentemperatur T_1 und der nodentemperatur T_2, aus welcher schliesslich die Anodentemperatur ir jede beliebige Kathodentemperatur ermittelt werden kann.

Tabelle I

$T_1^{(s)}$	$T_2^{(gem)}$	$T_2^{(ber)}$	Abw.	$T_1^{(s)}$	$T_2^{(gem)}$	$T_2^{(ber)}$	Abw.
215°	970°	953°	+ 2%	1209°	965°	949°	+ 1½ %
160°	925°	914°	+ 1%	1126°	900°	889°	+ 1 %
067°	845°	844°	0%	1044°	835°	827°	+ 1 %
969°	755°	768°	- 1½%	971°	760°	770°	- 1½ %
219°	970°	956°	+ 1½%	1193°	965°	938°	+ 3 %
157°	915°	912°	+ ½%	1075°	875°	851°	+ 2½ %
075°	845°	850°	- ½%	971°	780°	770°	+ 1½ %
999°	775°	792°	- 2 %				

Die Ergebnisse der Rechnung und der Messungen sind in der abelle I wiedergegeben. Die Messungen wurden an vier Röhren mit en gleichen Abmessungen (Kathodendurchmesser 2 mm; Anodendurch-esser innen 5 mm, aussen 6 mm) vorgenommen; die angegebenen Tempe-aturwerte sind aus zwei Einzelmessungen gemittelt. Sämtliche Tem-eraturen sind in °abs. angegeben. In der Spalte 4 ist die aus den eiden Spalten 2 und 3 sich ergebende Abweichung der gemessenen nodentemperatur $T_2^{(gem)}$ von der berechneten Anodentemperatur $T_2^{(ber)}$ ingetragen. Die Abweichung beträgt im Höchstfalle 3 %; sie hängt usserdem, wie man sieht, bei allen Röhren von der Grösse der Ka-

) Geiger-Scheel, Hdb. d. Phys. XXI, S. 241

thodentemperatur ab, und zwar wächst mit zunehmender Kathodentemperatur die gemessene Anodentemperatur stärker als die berechnete an. Eine Erklärung hierfür findet man auf Grund der folgenden Überlegung.

Unter der Voraussetzung fehlender Wärmeleitung ergibt die Rechnung für das Verhältnis der von der Kathode und der Anode ausgestrahlten Gesamtenergien einen temperaturunabhängigen Wert. Werden weiterhin statt dieser Gesamtstrahlungen die aus den beiden Strahlungsgesetzen sich ergebenden Potenzen der Temperaturen eingeführt, so findet man die Beziehung

$$T_2^{(ber.)\frac{4.01}{4}} = C^{(ber.)} \cdot T_1^{\varepsilon}$$

worin $C^{(ber)}$ eine sich aus den Strahlungskonstanten und dem oben erwähnten Verhältniswert ergebende temperaturunabhängige Konstante darstellt. Wenn nun entsprechend den Überlegungen im vorigen Paragraphen die Strahlungsgesetze der für Kathode und Anode verwendeten Materialien etwas von den für die Rechnung benutzten verschieden sind, so muss für die gemessenen Werte der Anodentemperatur eine Beziehung gelten, die von der obigen etwas abweicht. Diese abweichende Beziehung kann unter Benutzung der unbekannten Exponenten ε_1 und ε_2 und einer ebenfalls unbekannten, jedoch temperaturunabhängigen Konstanten $C^{(gem)}$ in der Form:

$$T_2^{(gem.)\varepsilon_2} = C^{(gem.)} \cdot T_1^{\varepsilon_1}$$

geschrieben werden. Aus diesen beiden Beziehungen erhält man für das Verhältnis der berechneten zur gemessenen Anodentemperatur schliesslich den Wert:

$$\frac{T_2^{(gem.)}}{T_2^{(ber.)}} = \frac{C^{(gem.)}}{C^{(ber.)}} \cdot T_2^{\frac{4.01}{\varepsilon_2}-1} \cdot T_1^{\frac{\varepsilon_1}{4}}$$

Wie dieser Ausdruck zeigt, lässt die beobachtete Tatsache, dass bei wachsender Kathodentemperatur die gemessenen Anodentemperaturen stärker zunehmen als die berechneten sich darauf zurückführen, dass entweder der Exponent im Strahlungsgesetz für die Anode in Wirklichkeit kleiner oder aber der Exponent im Strahlungsgesetz für die Kathode in Wirklichkeit grösser ist, als der der Rechnung zugrunde gelegte Wert.

Die Messungen lassen es also sehr wahrscheinlich erscheinen, dass das für die Rechnung benutzte Ausstrahlungsgesetz nicht ganz das richtige ist. Um einen Anhalt dafür zu bekommen, inwieweit die gefundenen Abweichungen bereits durch die Messmethode bedingt sind wurde die Anode des untersuchten Elektrodensystems mittels Kohlenstoff geschwärzt. Dadurch erhält die Anode eine Reflexionsvermögen von 0,05, d.h. die Reflexion wird weitgehend ausgeschaltet, und es kann angenommen werden, dass das Strahlungsgesetz dem für den schwarzen Körper geltenden Gesetz weitgehend gleicht. Da für die mit Uranoxyd geschwärzte Kathode das Stefan Boltzmannsche Gesetz ebenfalls sehr gut erfüllt ist, so können die in diesem Falle etwa gefundenen Abweichungen zwischen den gemessenen und berechneten Wert der Anodentemperatur also lediglich durch die Messmethode (z.B. Fehler in der Pyrometermessung) bedingt sein.

Tabelle II

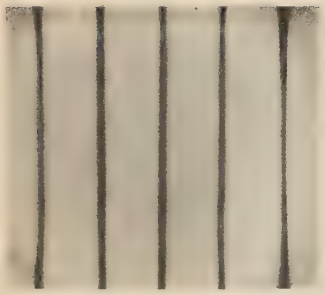
T_1 (s)	T_2 (gem)	T_2 (ber.)	Abweichung
1103°	765°	778°	- 1 ½ %
1034°	715°	725°	- 1 ½ %
952°	655°	662°	± 1 %

Die Ergebnisse dieses Versuches sind in der Tabelle II zu-
mmengestellt, und zwar enthält wiederum die Spalte 4 die prozen-
sche Abweichung der gemessenen von den berechneten Werten. Der
rgleich dieser Abweichung mit der an blanken Elektroden erhalte-
n zeigt, dass der der Messmethode anhaftende Fehler, absolut ge-
mmen, durch die Benutzung der Näherungswerte für das Reflexions-
ermögen und für die Ausstrahlung rund verdoppelt wird. Die Nähe-
ngswerte können daher, solange das gleiche Temperaturintervall
e bisher untersucht wird, bedenkenlos verwendet werden, wenn man
ch mit einer auf einige Prozent genauen Übereinstimmung zufrie-
n gibt. Diese Genauigkeit dürfte jedoch in den weitaus meisten
llen auch ausreichend sein, zumal da die Strahlungseigenschaften
r verwendeten Materialien von der Art der Behandlung während des
mpens abhängig sein werden und deshalb niemals ganz genau fest-
stellt werden können.

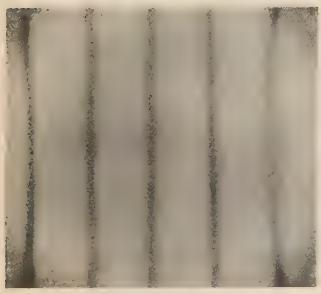
Nachdem durch diese Untersuchung die Frage nach der Gültig-
it der für die Berechnung benutzten Werte der Ausstrahlung und
s Reflexionsvermögens geklärt ist, kann nun die eigentliche ex-
rimentelle Prüfung der für die Anwendung des neuen Verfahrens
genommenen Voraussetzungen durchgeführt werden.

§ 28 Die Temperatur des idealisierten Gitters

Die in § 26 zusammengestellten Voraussetzungen sind nicht
llkommen gleichwertig, am wenigsten gesichert erscheint diejenige,
lche sich auf den Ersatz des realen Gitters durch ein idealisier-
s bezieht, und welche besagt, dass die für dieses idealisierte
tter geltenden Berechnungen auch für das reale Gitter gültig sein
llen. Demgemäss erscheint es zweckmässig, zur eigentlichen Prü-
ng des Verfahrens diese Voraussetzung zunächst auszuschalten und
ne Elektrodenanordnung zu untersuchen, deren Gitter dem ideali-
erten möglichst ähnlich ist. Wird ausserdem die Halterung des
tters in dieser Anordnung so vorgenommen, dass die Wärmeablei-
ng nach aussen vernachlässigbar klein bleibt, so fallen mit der
hlenden Wärmeleitung auch die darauf sich beziehenden Vorausset-
ngen als überflüssig fort. Als einzige Voraussetzung wird dann
r die Temperaturberechnung nur noch die der feinen Gitterunter-
ilung benötigt. Da, wie sogleich gezeigt werden wird, an dem Er-
lltsein dieser Voraussetzung kein Zweifel bestehen kann, so wird
n erwarten dürfen, dass die an einem solchen, dem idealisierten
hr ähnlichen Gitter gemessenen Temperaturen den berechneten Wer-
n nahezu gleich sein werden, soweit die Unterschiede nicht durch
e im vorigen Paragraphen behandelten Strahlungseigenschaften der
rwendeten Materialien bedingt sind. Ehe nun aber die zu diesen



a) 0,1 mm Abstand



b) 0,3 mm Abstand

c) 0,6 mm Abstand

d) 1,0 mm Abstand

Abb. 13

Messungen benutzte Anordnung beschrieben und die damit erhaltenen Ergebnisse angegeben werden, soll erst noch der experimentelle Beweis dafür erbracht werden, dass durch die in technischen Röhren verwendeten fein unterteilten Gitter nur eine Schwächung der Dichte der auf eine Elektrode auffallenden Strahlung in einem konstanten Verhältnis, nicht dagegen eine Aenderung der Verteilung der Strahlungsdichte bewirkt wird.

Die Versuchsanordnung mittels welcher diese Untersuchung vorgenommen wurde, war sehr einfach und bestand aus einer lichtstarken Lampe, deren Licht durch eine vorgesetzte Mattscheibe diffus gemacht wurde, dem zu untersuchenden Gitter und einer dahinter befindlichen photographischen Platte. Das verwendete Gitter bestand aus einer Reihe von parallel zu einander ausgespannten Drähten, und zwar wurde der Durchmesser und der gegenseitige Abstand etwa 16 bis 17 mal so gross wie bei den in normalen Empfängerröhren benutzten Gittern gewählt. Diese Vergrösserung spielt für die Untersuchung des Strahlungsüberganges keine Rolle, weil schon bei den normalen Gittern die Abmessungen und Abstände der Gitterdrähte so gross gegenüber der Wellenlänge der auftreffenden Strahlung sind, dass Beugungserscheinungen vernachlässigt werden können. Mittels der hinter dem Gitter aufgestellten photographischen Platte wurde nun die Verteilung der vom Gitter hindurchgelassenen Strahlung in verschiedenen Abständen vom Gitter festgestellt. In der Abb. 13 sind 4 der so erhaltenen Aufnahmen wiedergegeben, und zwar entspricht Abbildung a) einem Abstand der auffangenden Fläche vom Gitter von etwa 0,1 mm, b) einem solchen von 0,3 mm, c) von 0,6mm und d) von 1 mm in der normalen Empfängerröhre. Man erkennt, dass schon in einer Entfernung von 0,3 mm die Schatten des zwischengeschalteten Gitters verwaschen sind und dass in 1 mm Abstand keine Schattenbildung mehr festzustellen ist. In dieser Entfernung ist also die Dichte der vom Gitter durchgelassenen Strahlung ebenso gleichmässig wie vor dem Gitter verteilt. Daraus folgt, dass die Dichteverteilung der auf eine Fläche auffallenden Strahlung durch das Einschalten eines fein unterteilten Gitters in den Strahlengang nicht geändert wird, sobald der Abstand der auffangenden Fläche vom Gitter mindestens 1 mm gross ist. Wird nun schliesslich die auffangende Fläche durch eine

Elektrode einer Elektronenröhre gebildet, so trifft die soeben erhaltene Folgerung in jedem Fall, da bei den technisch verwendeten Röhren der gegenseitige Abstand der Gitter voneinander und von der Anode stets grösser als 1 mm ist. Die im Paragraph 17 aus der Voraussetzung der feinen Gitterunterteilung erhaltene Folgerung ist damit also als zutreffend erwiesen.

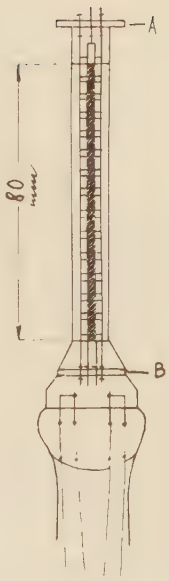


Abb. 14

Nachdem diese Frage geklärt worden ist, kann nun weiterhin auf die Temperaturbestimmung am idealisierten Gitter eingegangen werden. Die dafür benutzte Elektrodenanordnung ist in Abb. 14 wiedergegeben. Das aus dünnem (0,1 mm starkem) Nickelband bestehende Gitter wurde mit Hilfe von dünnen Nickeldrähten in den beiden Platten A und B aus gepresstem Magnesiumoxyd gehalten. Durch diese Haltung in dem schlecht wärmeleitenden Magnesiumoxyd wird die vom Gitter nach aussen abfliessende Wärmemenge, welche sowieso wegen der geringen Dicke des Nickelbandes klein ist, so weit verringert, dass sie bei der Temperaturberechnung vernachlässigt werden kann. Zur Erzielung ausreichender Festigkeit mussten Steigung und Windungsbreite des Gitters etwa 10mal so gross wie bei den in normalen Empfängerröhren verwendeten Gittern gewählt werden.

Die Messung der Gittertemperatur erfolgte mit einem Thermoelement, welches auf die Mitte eines der beiden als Streben dienenden Nickelbänder aufgeschweisst worden war. Eine Störung der Temperaturverhältnisse durch dieses aus dünnen Drähten bestehende Thermoelement ist wegen der verhältnismässig grossen Abmessungen des benutzten Gitters nicht zu befürchten. Die Temperatur der wiederum mit Uranoxyd geschwärzten Kathode wurde mit einem optischen Pyrometer durch Löcher in der Anode hindurch an 7 verschiedenen Stellen gemessen. Da im Gegensatz zu der im vorigen Paragraphen behandelten Messung der Anodentemperatur jetzt auch die Enden der Kathode dem untersuchten Gitter Energie zuführen, muss der Temperaturabfall an diesen Enden bei der Berechnung der von der Kathode ausgestrahlten Energie berücksichtigt werden. Hierzu ist der Mittelwert der vierten Potenzen sämtlicher 7 gemessenen Temperaturen in bekannter Weise graphisch zu bestimmen. Dieser Mittelwert muss dann in das Stefan Boltzmannsche Gesetz (103) eingesetzt werden.

Zur Berechnung der Gittertemperatur werden, da nur der Kathode Energie von aussen zugeführt wird, lediglich die beiden Determinanten u_{11} und u_{21} in (98) benötigt. Das Verhältnis dieser beiden Determinanten ergibt das Verhältnis der beiden Ausstrahlungen E_1 und E_2 dadurch, dass für diese Ausstrahlungen die aus den Strahlungsgesetzen (103) bzw. (101) sich ergebenden Temperaturwerte eingesetzt werden, erhält man schliesslich eine Beziehung zwischen der gemessenen Kathodentemperatur und der gesuchten Gittertemperatur.

Tabelle III

$T_1^{(s)}$	$T_2^{(gem.)}$	$T_2^{(ber.)}$	Abw.	$T_1^{(s)}$	$T_2^{(gem.)}$	$T_2^{(ber.)}$	Abw.
1210°	1095°	1085°	+ 1 %	1180°	1090°	1061°	+ 2 ½ %
1090°	995°	998°	- ½ %	1075°	995°	987°	+ 1 %
980°	895°	918°	- 2½%	975°	895°	913°	- 2 %
1224°	1105°	1100°	+ ½ %	1235°	1110°	1107°	+ ½ %
1150°	1040°	1043°	- ½ %	1162°	1045°	1052°	- ½ %
1078°	975°	988°	- 1½%	1075°	975°	987°	- 1 %
1008°	915°	938°	- 2½%	1009°	910°	939°	- 3 %

In der Tabelle III sind die berechneten und die an vier verschiedenen Röhren gemessenen Gittertemperaturen T_2 in Abhängigkeit von der Kathodentemperatur T_1 eingetragen. (Die Abmessungen dieser Röhren waren: Kathoden Ø 2 mm; Anoden Ø 10 mm; Gitterdorn 5 mm, Gittersteigung 5 mm, Windungsbreite 1 mm und Strebenbreite 2 mm). Es zeigt sich, dass wiederum die gemessenen Werte mit zunehmender Kathodentemperatur stärker anwachsen als die berechneten, was wiederum durch den Einfluss der der Rechnung zugrundegelegten von der Wirklichkeit etwas abweichenden Strahlungsgesetze bedingt ist. Wesentlich ist aber vor allem, dass die hier gefundenen Abweichungen nicht grösser sind als die bei der Messung der Anodentemperatur festgestellten. Daraus ergibt sich, dass das neu entwickelte Verfahren eine zuverlässige Berechnung der Elektrodentemperaturen einer Röhre ermöglicht, wenn das Gitter dieser Röhre dem idealisierten Gitter ähnlich ist und dass die vorhandenen geringen Abweichungen nicht dem Verfahren als solchem, sondern einzig und allein den nicht ganz genau bekannten Strahlungsgesetzen - bzw. Werten des Reflexionsvermögens - zuzuschreiben sind. Damit sind die Grundlagen des neuen Verfahrens, soweit sie sich auf den Übergang der Strahlung beziehen, als einwandfrei festgestellt. Wir können jetzt dazu übergehen, die Voraussetzungen, welche mit Rücksicht auf die ausserdem noch vorhandene Wärmeleitung angenommen werden mussten, einer Prüfung zu unterziehen.

§ 29 Die Gleichheit von Windungs- und Strebentemperatur

Damit die von einem Gitter abgeleitete Wärmemenge rechnerisch erfasst werden konnte, musste vorausgesetzt werden, dass die Betrachtung des Wärmeleitungsvorganges auf die Gitterstreben beschränkt bleiben kann und dass jede Windung an allen Punkten die gleiche Temperatur besitzt wie die Streben an der Schweisstelle mit der betreffenden Windung. Zur experimentellen Nachprüfung dieser Voraussetzung genügt es, die Gleichheit von Windungs- und Strebentemperatur zu zeigen, da aus dieser ohne weiteres folgt, dass die Wärmeleitung in den Windungen gegenüber der in den Streben vernachläs-

igt werden darf. Ergibt nämlich der Versuch, dass die Temperatur ängs einer Gitterwindung nur wenig von der Strebentemperatur abeicht, so muss der Temperaturgradient längs dieser Windung sehr lein sein. Infolgedessen ist der Wärmestrom, der durch diese Wing fliesst, im Vergleich zu dem durch die Streben fliessenden ärmestrom so gering, dass er unberücksichtigt bleiben darf, und an ist daher berechtigt, die Untersuchung des Wärmeleitungsvoranges auf die Gitterstreben zu beschränken.

Zur Nachprüfung der oben angegebenen Voraussetzung sind also ie Temperaturen sowohl der Windungen als auch der Streben zu mesen und miteinander zu vergleichen. Die Messung dieser Temperaturen uss mit einem optischen Pyrometer ausgeführt werden, da die Anbrin ung von Thermoelementen die Temperaturverhältnisse im Gitter stöen würde. Nun liegen aber die Temperaturen, welche ein Gitter infolge der allein durch Strahlung zugeführten Energie annimmt, nicht och genug, um einwandfrei mit dem Pyrometer ermittelt werden zu önnen. Um die Messung ausführen zu können, muss man daher dem Gitter eine zusätzliche Energie zuführen. Diese wurde bei unseren Versuchen erhalten, indem das Gitter mit Hilfe einer zwischen Gitter nd Kathode angelegten positiven Spannung mit Elektronen beschosen wurde. Damit durch diese Zusatzenergie die Temperaturverteilung m Gitter nicht geändert wird, muss dafür gesorgt werden, dass die lektronen in der gleichen Verteilung wie die von der Kathode ausehende Wärmestrahlung auf das Gitter auftreffen. Das wird, wie die olgende Überlegung zeigt, dadurch erreicht, dass ausser an das itter auch an die Anode eine positive Spannung gelegt und das Verältnis von Gitter zu Anodenspannung geeignet gewählt wird.

Liegt nämlich zwischen Kathode und Anode ein elektrisches eld, so besitzt dieses bei fehlendem Gitter die bekannte logarithische Potentialverteilung, bei welcher die Feldlinien geradlinig nd in gleichen Abständen von der Anode zur Kathode übergehen. Die n diesem Fall auf den Kraftlinien laufenden Elektronen würden, wie erlangt, genau dieselbe - gleichmässige - Verteilung wie die von er Kathode ausgesandte Wärmestrahlung besitzen. Damit nun durch as Gitter keine Störung dieses Feldverlaufs bewirkt wird, muss das itter dasjenige Potential erhalten, welches sich aus der Potentilverteilung bei fehlendem Gitter für die Stelle des Feldraumes rgibt, deren Abstand von der Kathode gleich dem Abstand des Gitters von der Kathode ist. Dann verlaufen auch bei Anwesenheit des itters alle Kraftlinien geradlinig von der Kathode zum Gitter zw. durch die Gitterlücken hindurch zur Kathode und die auf den raftlinien sich bewegenden Elektronen treffen das Gitter bzw. die node in der gleichen Verteilung wie die von der Kathode ausgehende ärmestrahlung. In diesem Fall müssen daher die infolge der Wärmebleitungauftretenden Temperaturunterschiede im Gitter, relativ enommen, die gleichen sein, wie diejenigen, welche unter dem Einluss der Wärmestrahlung allein entstehen. Eine Kontrolle dafür, ass die Spannungen des Gitters und der Anode richtig gewählt sind, rhält man durch die Feststellung, ob, wie es bei gleichmässiger erteilung der Elektronen sein muss, das Verhältnis des Gesamtemisionsstromes zum Gitterstrom gleich dem Verhältnis der Gittersteiung zum Windungsdurchmesser ist. Auf die Erfüllung dieser Bedinung wurde bei allen Messungen geachtet.

Die Messung der Temperaturunterschiede, die, wie erwähnt, infolge der Zusatzenergie mit dem Pyrometer vorgenommen werden kann, rfolgte an Röhren, deren Abmessungen und Abstände etwa dreimal o gross gewählt wurden wie die einer normalen Empfängerröhre. Das

in diesen Röhren verwendete - reale - Gitter besass nur eine einzige Strebe, um das Auftreten möglichst grosser Temeperaturunterschiede zu begünstigen. Um zu verhindern, dass die Temperaturmessung durch am Gitter reflektierte Strahlung gefälscht werden konnte, wurde das Gitter mit Kohlenstoff geschwärzt. Als Kathode diente ein starker Wolframdraht.

Gemessen wurde stets die Temperatur der Strebe an verschiedenen Stellen und die Temperatur der an diesen Stellen angeschweiten Windungen auf der der Strebe abgekehrten Seite. Die Messungen wurden an zwei Röhren mit den gleichen Abmessungen bei verschiedenen Kathodentemperaturen vorgenommen. Die erhaltenen Temperaturwerte sind in der Tabelle IV zusammengestellt.

Tabelle IV

Windungs-temperatur	Streben-temperatur	Abweichung	Windungs-temperatur	Streben-temperatur	Abweichung
1141° abs.	1115° abs.	+ 2,3%	1271° abs.	1254° abs.	+ 1,3%
1199° "	1182° "	+ 1,4%	1346° "	1353° "	- 0,5%
1189° "	1194° "	- 0,4%	1365° "	1369° "	- 0,3%
1199° "	1183° "	+ 1,3%	1355° "	1343° "	+ 0,9%
1214° "	1194° "	+ 1,6%	1339° "	1336° "	+ 0,2%
1268° "	1270° "	- 0,2%	1341° "	1345° "	- 0,3%
1286° "	1293° "	- 0,5%	1343° "	1339° "	+ 0,4%
1280° "	1268° "	+ 0,9%	1342° "	1335° "	+ 0,5%

Die Abweichung zwischen der Temperatur der Windungen und der der Strebe beträgt im Höchstfall etwa 2%. Diese Abweichung ist so gering, dass Windungs- und Strebentemperatur praktisch als gleich gross angesehen werden können. Hieraus folgt weiterhin, wie oben näher erläutert wurde, dass die Betrachtung der Wärmeleitung im Gitter auf die Gitterstreben beschränkt bleiben kann. Damit ist gezeigt worden, dass die Einführung der für die rechnerische Erfassung der Wärmeleitung erforderlichen Voraussetzung (4) (vergl. § 26) im vollen Umfange berechtigt war.

§ 30 Die Gittertemperatur unter Berücksichtigung der Wärmeableitung nach aussen

Damit die Wärmeleitung im Gitter rechnerisch erfasst werden konnte, mussten ausser der soeben behandelten Voraussetzung gleicher Windungs- und Strebentemperatur noch zwei weitere - die dritte und fünfte in der Zusammenfassung in § 26 - eingeführt werden. Die erste dieser Voraussetzungen bezog sich auf die beiden die Anwendbarkeit des neu entwickelten Verfahrens bestimmenden Grundbedingungen, welche nahezu konstante Temperatur und nahezu konstanten Normalgradienten längs jeder Elektrodenoberfläche fordern. Für ein Gitter, dem ein wesentlicher Energiebetrag durch Wärmeleitung

ıtzogen wird, sind diese beiden Grundbedingungen nämlich nicht rfüllt. Da andererseits das Erfülltsein dieser Bedingungen die rundlage für die Berechnung der Koeffizienten des Grundgleichungs- ystems bildet, so werden die für die Koeffizienten erhaltenen erte in diesem Fall mit einem gewissen Fehler behaftet sein. Die enannte Voraussetzung besagt nun, dass der Einfluss dieses Fehlers ernachlässigt werden kann. Die Berechtigung zu dieser Voraussetzung wurde daraus hergeleitet, dass nach den in § 22 durchgeführten Überlegungen die Strahlungsverhältnisse im gesamten Elektrodensystem durch die von den Gittern abgeleiteten Wärmemengen nur in sehr geringem Masse beeinflusst werden. Es war damals allerdings noch nicht möglich, zahlenmässige Angaben über die Grösse dieses Einflusses zu machen, da das Verfahren zur Berechnung der Gittertemperatur noch nicht vollständig entwickelt worden war. Nachdem das inzwischen geschehen ist, können nun die noch fehlenden zahlenmässigen Angaben nachgeholt werden. Im folgenden soll daher zunächst durch ein Zahlenbeispiel belegt werden, dass der Einfluss, welchen die von den Gittern abgeleiteten Wärmemengen auf die Strahlungsverhältnisse des Elektrodensystems ausüben, in der Tat nur gering ist.

Tabelle V

) 1. Gitter (k = 2): $O_2^{(r)} = 2{,}84\ cm^2$

$T_1^{(s)}$	$H_2^{(1)}$	$T_2^{(max)(1)}$	$(h_{22}-1).Q_2^{(1)}$	$h_{23}Q_3^{(1)}$	$H_2^{(3)}$	$T_2^{(max)(3)}$	$Q_2^{(3)}$
rad	Watt	Grad	Watt	Watt	Watt	Grad	Watt
950	0,50	596	0,015	0,013	0,47	586	0,34
075	0,82	699	0,021	0,017	0,78	689	0,48
200	1,27	803	0,026	0,022	1,22	794	0,62

) 2. Gitter (k = 3): $O_3^{(r)} = 5{,}88\ cm^2$

$T_1^{(s)}$	$H_3^{(1)}$	$T_3^{(max)(1)}$	$h_{32}Q_2^{(1)}$	$(h_{33}-1).Q_3^{(1)}$	$H_3^{(3)}$	$T_3^{(max)(3)}$	$Q_3^{(3)}$
rad	Watt	Grad	Watt	Watt	Watt	Grad	Watt
950	0,65	644	0,024	0,026	0,60	631	0,33
075	1,06	750	0,034	0,036	0,99	726	0,45
200	1,65	827	0,044	0,046	1,56	820	0,59

Das durchgerechnete Beispiel bezieht sich auf eine Röhre mit ier Elektroden, und zwar wurde angenommen, dass nur der Kathode on aussen Energie zugeführt wird, so dass also die den übrigen rei Elektroden zugeführten Energien $W_2 = W_3 = W_4 = 0$ sind. Die rgebnisse der Rechnung sind in Tabelle V zusammengestellt. Diese nthält in der ersten Spalte die der Rechnung zugrundegelegten athodentemperaturen. Für jede von ihnen wurde nach Gleichung (71) ie erste Näherung $H_k^{(1)}$ der dem betreffenden Gitter zugestrahlten

Energie berechnet. Diese Energie, deren Grösse in der zweiten Spalte angegeben ist, stellt diejenige Strahlungsmenge dar, welche de betrachteten Gitter zugestrahlt wird, wenn die von den beiden Gitt tern abgeleiteten Wärmemengen vernachlässigt werden. Unter Benutzung der Wärmeleitungsgleichung (60) wurde weiterhin aus der Ener gie $H_k^{(1)}$ die in der dritten Spalte angegebene erste Näherung $T_k^{(ma}$ $^{(1)}$ der Gittermaximaltemperatur bestimmt. In dieser angenähert richtigen Temperatur ist dann zwar der direkte Einfluss der Wärmeleitung auf die Gittertemperatur berücksichtigt (vergl. § 22), vernachlässigt ist jedoch der indirekte Einfluss, der dadurch hervorgerufen wird, dass sich die Strahlungsverhältnisse im Gesamtsyste der vier Elektroden infolge der Wärmeableitung von den Gittern ändern. Um die dadurch hervorgerufene Verringerung der zugeführten Energie bzw. der Gittermaximaltemperatur zu bestimmen, muss man zunächst die auf der rechten Seite der Gleichung (70) stehenden Wärmeleitungsglieder nach dem in § 24 beschriebenen Näherungsverfahren ermitteln. Wegen des Vorhandenseins zweier Gitter werden im vorliegenden Falle zwei Wärmeleitungsglieder erhalten, deren erste Näherungen in der vierten und fünften Spalte der Tabelle eingetragen sind. Dadurch, dass diese Wärmeleitungsglieder gemäss Gleichung (70) von der ersten Näherung $H_k^{(1)}$ der zugeführten Energie abgezogen werden, wird die in der sechsten Spalte angegebene dritte Näherung $H_k^{(3)}$ dieser Energie gewonnen. In dieser Näherung ist dann die Verringerung der Strahlung durch die von den beiden Gittern abgeleiteten Wärmemengen berücksichtigt. Aus dem Wert $H_k^{(3)}$ kann schliesslich die zugehörige dritte Näherung $T_k^{(max)(3)}$ der Gittermaximaltemperatur berechnet werden, die in der vorletzte Spalte der Tabelle angegeben ist.

Der Vergleich der in der zweiten und sechsten Spalte stehenden Werte der zugeführten Energie H_k bestätigt auch zahlenmässig die bereits in § 22 ausgesprochene Vermutung. Der Vergleich zeigt nämlich, dass die den Gittern zugestrahlte Energie durch die Berücksichtigung der Wärmeleitungsglieder tatsächlich nur wenig, und zwar im Höchstfalle um etwa 8 % geändert wird. Daraus folgt, dass der Einfluss, welchen die von den Gittern abgeleitete Wärmemengen auf die Strahlungsverhältnisse im Elektrodensystem ausüben, gering sein muss. Infolgedessen sind auch weitere an sich mögliche Näherungen zur Bestimmung genauerer Werte für die zugeführte Energie überflüssig; sie würden, wie die Rechnung ergibt, die für die dritte Näherung $H_k^{(3)}$ angegebenen beiden Dezimalstellen überhaupt nicht mehr ändern. Ebenso wie die zugeführte Energie wird natürlich auch die Gittermaximaltemperatur durch die Berücksichtigung der Wärmeleitungsglieder nur wenig beeinflusst. Die grösste Änderung beträg hier, wie ein Vergleich der in der dritten und vorletzten Spalte stehenden Werte zeigt, nur etwa 2 %.

Der soeben festgestellte geringe Einfluss der Gitterwärmeleitung auf die Strahlungsverhältnisse ist, worauf besonders hingewiesen sei, nicht etwa darauf zurückzuführen, dass bei der Röhre, für welche die zahlenmässige Rechnung durchgeführt wurde, die von den Gittern abgeleiteten Wärmemengen an und für sich gering sind. Vielmehr machen diese abgeleiteten Wärmemengen, wie die in der letz

en Spalte der Tabelle V angegebenen Werte zeigen, einen wesent-
ichen Teil der den Gittern zugestrahlten Energie aus.

Das Ergebnis der zahlenmässigen Rechnung beweist also ein-
eutig, dass auch dann, wenn von den Gittern einer Röhre erhebliche
ärmemengen nach aussen abgeleitet werden, der Einfluss dieser
ärmeableitung auf die Strahlungsverhältnisse des gesamten Elek-
rodensystems gering ist. Daraus wird man mit sehr grosser Wahr-
cheinlichkeit folgern dürfen, dass auch die Störung gering sein
ird, die dadurch entsteht, dass die beiden Grundbedingungen des
eu entwickelten Verfahrens infolge der Wärmeableitung von den Git-
ern nicht streng erfüllt sind. Man wird daher erwarten dürfen, dass
ie unter Vernachlässigung dieser Störung berechneten Gittertem-
eraturen nur wenig von den experimentell zu ermittelnden, tatsäch-
ich vorhandenen Temperaturwerten abweichen werden.

In einen Vergleich der experimentell gefundenen und der be-
echneten Temperaturen des wärmeleitenden Gitters würde nun aber
ässer der soeben besprochenen auch noch die letzte in § 26 ange-
ührte Voraussetzung eingehen, da auch diese zur Temperaturberechnung
enötigt wird. Vor Durchführung des experimentellen Vergleichs soll
eshalb der Fehler, der bei der Berechnung der Gittertemperatur
urch diese letzte für die Berücksichtigung der Wärmeleitung erfor-
erliche Voraussetzung entstehen kann, ebenfalls abgeschätzt wer-
en.

Diese Voraussetzung bezog sich auf die den Gittern zugeführte
nergie; sie musste deshalb angenommen werden, weil die zugeführte
nergie streng genommen eine Funktion H (x) der Koordinate x in
er Längsrichtung des Gitters ist, deren genaue Form nicht ermit-
elt werden kann. Infolgedessen musste man in die Wärmeleitungs-
leichung statt der Funktion H (x) einen für alle Gitterpunkte
leichen Mittelwert der zugeführten Energie einführen und voraus-
etzen, dass durch die Einführung dieses Mittelwertes kein wesent-
icher Fehler bei der Temperaturberechnung entsteht. Der Mittel-
ert der zugeführten Energie wurde dann einfach dadurch gefunden,
ass der aus dem Grundgleichungssystem zu berechnende Gesamtwert
dieser Energie durch das Volumen der Gitterstreben dividiert wur-
 (vergl. § 21).

Um nun die gewünschte Fehlerabschätzung durchführen zu kön-
en, wird man, da eine genaue Bestimmung des Verlaufes der Funktion
(x) nicht möglich ist, versuchen, ein ungefähres Bild über diesen
rlauf zu erhalten. Weiterhin wird man die so gewonnene, angenä-
ert gültige Funktion H (x) in die Wärmeleitungsgleichung einführen
d aus dieser die Gittertemperatur bestimmen. Der sich so ergeben-
 Temperaturwert ist dann mit demjenigen Wert zu vergleichen, der
halten wird, wenn statt der Funktion H (x) der konstante Mittel-
ert dieser Funktion in die Wärmeleitungsgleichung eingeführt wird.

Um das gesuchte Bild von dem Verlauf der Funktion H (x) zu
winnen, möge zunächst ein Sonderfall betrachtet werden, und zwar
llen als Elektroden lediglich die Kathode und das zu untersuchen-
 Gitter vorhanden sein. Beide sollen konstante Temperatur besitzen
d zur Vermeidung jeglicher Reflexion vollkommen schwarz sein. Für
esen Sonderfall ist dann die gesuchte Funktion H (x) leicht zu
mitteln, da bei Vernachlässigung der Strahlung des Gitters auf
oh nur die unmittelbar von der Kathode zum Gitter übergehende
rahlung untersucht zu werden braucht. Zur Vereinfachung kann fer-
r statt des Gitters der zugehörige Gitterzylinder betrachtet wer-

den, da auf diesem die Abhängigkeit der zugeführten Energie von d Koordinate x in der Längsrichtung offenbar die gleiche wie auf der Gitter sein muss. Es ist dann also die Strahlungsmenge zu bestimmen, die von der Kathode auf ein Flächenelement $d\tau$ des Gitterzylinders übergeht und die Abhängigkeit dieser Strahlungsmenge von der Koordinate x des Flächenelementes $d\tau$ zu ermitteln (vergl.Abb. 15).

Zu dem Strahlungsübergang von der Kathode zum Element $d\tau$ gehört gemäss der Koeffizientendefinition (vergl. § 7) der Koeffizient $e_{d\tau,1}$. Die Berechnung dieses Koeffizienten wird zweckmässig weise mit Hilfe der Symmetriebeziehung (16) auf die des Koffizienten $e_{1,d\tau}$ für den umgekehrten Strahlung übergang vom Element $d\tau$ zur Kathode zurückgeführt. Die sinngemässe Anwendung der Symmetriebeziehung ergibt:

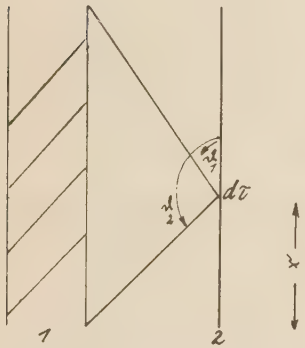


Abb. 15

$$O_1 \cdot e_{d\tau,1} = d\tau \cdot e_{1,d\tau} \qquad (104)$$

Der Koeffizient $e_{1,d\tau}$ kann mit Hilfe der in § 7 eingeführten Wärmeübertragungsfunktion U (p,q) berechnet werden. Definitionsgemäss stellt nämlich die mit S . $d\tau$ (S Strahlungskonstante) multiplizierte Wärmeübertragungsfunktion U_{12} (p,q) für den Strahlungsübergang vom Gitterzylinder zur Kathode diejenige Strahlungsmenge dar, die von einem Flächenelement $d\tau$ des Zylinders auf die Kathode übergeht. Der Quotient aus dieser Strahlungsmenge und der vom Element $d\tau$ ausgesandten Gesamtstrahlung $E_{d\tau} = \pi \cdot S$ $d\tau$ liefert den für den Strahlungsübergang vom Element $d\tau$ zur Kathode gültigen Koeffizienten $e_{1,d\tau}$. Werden weiterhin statt der allgemeinen Koordinaten p und q die Zylinderkoordinaten φ und x eingeführt, so wird also:

$$e_{1,d\tau} = \frac{1}{\pi} \cdot U_{12}(\varphi, x)$$

Den für den umgekehrten Strahlengang gültigen Koeffizienten $e_{d\tau,1}$ erhält man dadurch, dass der gefundene Wert für $e_{1,d\tau}$ in die Gleichung (104) eingeführt wird, und zwar wird:

$$e_{d\tau,1} = \frac{d\tau}{\pi O_1} \cdot U_{12}(\varphi, x)$$

Die gesuchte von der Kathode zum Flächenelement $d\tau$ übergehende Strahlungsmenge wird schliesslich durch Multiplikatipn des Koeffizienten $e_{d\tau,1}$ mit der Gesamtstrahlung E_1 der Kathode erhalten. Wird dabei für E_1 der aus Gleichung (8) sich ergebende Wert eingesetzt, so wird die gesuchte übergehende Strahlungsmenge:

$$e_{d\tau,1} \cdot E_1 = S \cdot d\tau \cdot U_{12}(\gamma, x) \qquad (105)$$

Zur zahlenmässigen Ermittlung dieser Strahlungsmenge muss in ieser Gleichung nooh die Wärmeübertragungsfunktion $U_{12}(x', x)$ bekannt ein. Für den umgekehrten Strahlungsübergang von der Kathode zum itterzylinder ist die Wärmeübertragungsfunktion U_{21} bei der Ermitt- ung der Endlichkeitsfaktoren γ_{ik} in § 20 ermittelt worden. Für en hier betrachteten Strahlungsübergang ergibt sich die zugehörige rmeübertragungsfunktion $U_{12}(\gamma, x)$ in genau entsprechender Weise. ird der so für die Funktion U_{12} (γ, x) gewonnene Ausdruck in Glei- ung (105) eingeführt, so wird

$$e_{\tau,1} \cdot E_1 = \frac{\tau_1}{\tau_2} \cdot S\, d\tau \left\{ \pi + \frac{x \cdot \Delta}{x^2+\Delta^2} + \frac{(\ell-x)\cdot\Delta}{(\ell-x)^2+\Delta^2} - \operatorname{arc\,tg}\frac{\Delta}{x} - \operatorname{arc\,tg}\frac{\Delta}{\ell-x} \right\} \qquad (106)$$

ur Vereinfachung ist dabei angenommen worden, dass die Entfernung zwischen dem betrachteten Flächenelement $d\tau$ und einem beliebigen der gleichen Horizontalebene wie $d\tau$ liegenden Flächenelement f der Kathode für alle Winkel φ als konstant angesehen werden nn.

Die Gleichung (106) liefert bei dem der Betrachtung zugrunde- legten einfachen Zweielektrodensystem die einem Flächenelement τ des Gitterzylinders insgesamt zugeführte Energie in Abhängig- it von der Koordinate x dieses Flächenelementes. Genau die glei- e Berechnung muss offenbar, abgesehen von einem Proportionali- tsfaktor, auch gelten, wenn statt des Gitterzylinders das zuge-

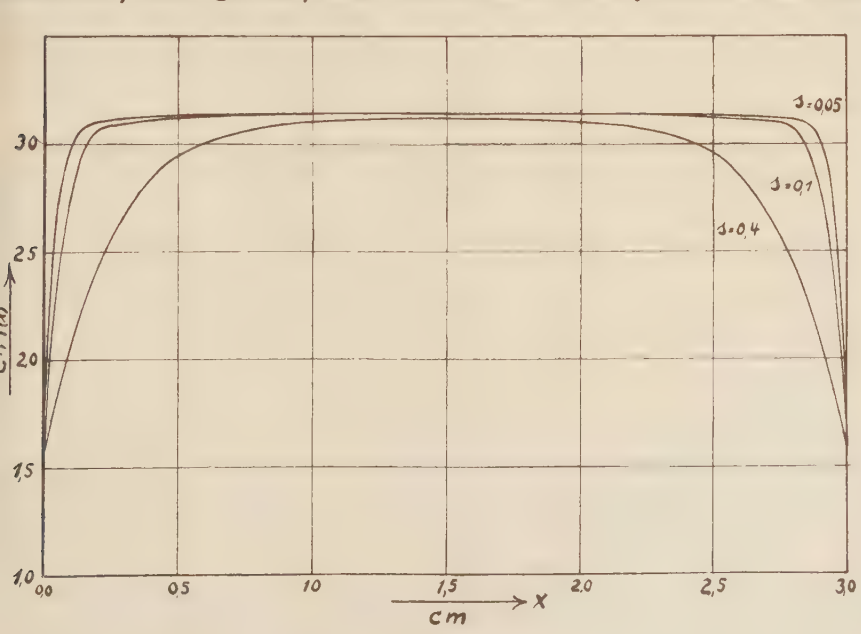


Abb. 16

hörige Gitter betrachtet wird, wobei der Proportionnalitätsfaktor lediglich von den Abmessungen des Gitters abhängt. Damit ist der erste Teil der Aufgabe gelöst, mit Hilfe der Gleichung (106) kann in dem betrachteten Zweielektrodensystem die dem Gitter zugeführte Energie H (x) in Abhängigkeit von der Koordinate x bestimmt werden. Die auf diese Weise für drei verschiedene Abstände s zwischen Kathode und Gitter erhaltenen Kurven sind in der Abb. 16 wiedergegeben. (dabei wurde der Faktor $\frac{r_1}{r_2}$ in (106), der nur die Höhe der Kurven beeinflusst. fortgelassen.)Aus den angegebenen Kurven geht hervor, dass die Abweichung der den einzelnen Gitterpunkten zugeführten Energie vom Mittelwert um so grösser wird, je grösser der Abstand s ist.

Die auf diese Weise bestimmte Verteilungsfunktion H (x) der zugeführten Energie bezog sich auf den Sonderfall zweier Elektroden. Bei einer normalen Röhre mit mehr als zwei Elektroden strahlt nun nicht nur die Kathode auf das betrachtete Gitter, sondern dieses empfängt auch von den übrigen Elektroden Energie, und zwar sowohl unmittelbar als auch durch Reflexion. Jede dieser Teilenergiemengen verteilt sich nach einer bestimmten Verteilungsfunktion über das Gitter und durch die Überlagerung aller dieser Verteilungen entsteht schliesslich die gesuchte Funktion H (x). Wenn die beiden Grundbedingungen des neuen Verfahrens streng erfüllt sind, d.h. sowohl die Temperatur als auch der Temperaturgradient längs jeder der Elektrodenoberflächen konstant ist, so lassen sich, wie die nähere Untersuchung zeigt, in ähnlicher Weise wie in dem vorhin behandelten Sonderfall, alle Verteilungsfunktionen auf die Wärmeübertragungsfunktion U (ψ,x) zurückführen. Jede der Verteilungsfunktionen besitzt infolgedessen eine ähnliche Form wie die in Abb.16 wiedergegebenen Kurven. Unterschiede zwischen den einzelnen Funktionen ergeben sich nur aus den verschiedenen Werten, welche der Abstand s zwischen dem betrachteten Gitter und der jeweilig betrachteten strahlenden Elektrode besitzt.

Wären also die beiden Grundbedingungen des Verfahrens streng erfüllt, so könnte man die gesuchte Verteilungsfunktion H (x) der zugeführten Energie dadurch ermitteln, dass man die einzelnen Verteilungsfunktionen berechnet und sie anteilmässig zueinander addiert. In Wirklichkeit sind jedoch die beiden Grundbedingungen weder für die Kathode noch für die übrigen Gitter streng erfüllt, sodass die auf diese Weise gewonnenen Funktion H (x) nur eine mehr oder weniger grobe Annäherung an die tatsächlich vorhandenen Verhältnisse darstellt; insbesondere wird durch Temperaturunterschiede auf der Kathode die Form der Funktion H (x) in nicht genau zu übersehender Art und Weise geändert. Infolgedessen lohnt es sich nicht, die mit der Bestimmung der einzelnen Verteilungsfunktionen verbundene sehr umfangreiche Rechenarbeit, unter anderem nämlich die Auflösung des Grundgleichungssystems nach sämtlichen 3 n - 2 Unbekannten einschliesslich der reflektierten Energien, durchzuführen. Da man sich mit einer Annäherung begnügen muss, so kann man diese auch bedeutend einfacher dadurch erhalten, dass man eine der in Abb. 16 dargestellten Funktionen benutzt. Man wird nämlich sicher voraussetzen dürfen, dass die Form dieser Funktionen durch die gegenseitige Überlagerung, die zu der Funktion H (x) führt, nicht wesentlich geändert wird. Was weiterhin den Einfluss der Temperaturunterschiede auf der Kathode anbetrifft, die sowieso nicht rechnerisch erfasst werden können, so werden diese sich in erster Linie auf die unmit-

elbar übertragene Strahlungsenergie auswirken. Da die unmittelbar bertragene Energie aber nur einen Teil der dem Gitter zugeführten nergie ausmacht, so wird man jedenfalls erwarten können, dass die erteilungskurve durch den Einfluss der Temperaturunterschiede icht grundlegend geändert wird. Man wird daher die in Abb. 16 darestellten Funktionsbilder als eine wenn auch recht grobe Annäheung an die tatsächlich vorhandene Verteilungsfunktion H (x) der ugeführten Energie ansehen dürfen.

Unter Zugrundelegung einer dieser Näherungsfunktionen für (x) ist nun der Fehler abzuschätzen, der entsteht, wenn der für lle Gitterpunkte gleiche Mittelwert der zugeführten Energie in ie Wärmeleitungsgleichung eingesetzt wird. Um bei dieser Fehlerbschätzung keinen zu kleinen Fehler zu erhalten, wird man aus der char der in Abb. 16 gezeichneten Funktionen eine solche auswählen, ei welcher die Abweichungen vom Mittelwert verhältnismässig gross ind. Zu der nun zu besprechenden Fehlerabschätzung wird deshalb ie unterste der in Abb. 16 wiedergegebenen Kurven herangezogen. er zu dieser Kurve gehörende Abstand s von 4 mm zwischen der strahenden Elektrode und dem betrachteten Gitter ist für die Verhältisse in normalen Empfängerröhren bereits als gross anzusehen, so ass der Fehler, der unter Benutzung dieser Kurve bei der Fehlerbschätzung erhalten wird, sicherlich nicht zu klein ausfallen ann.

Im folgenden soll also nun der Unterschied bestimmt werden, en man in den Werten der Gittertemperatur erhält, wenn einerseits ie in Abb. 16 dargestellte Funktion H (x) und andererseits ein ir alle Werte von x gleicher Mittelwert dieser Funktion in die ärmeleitungsgleichung eingeführt wird. Für den zuletzt genannten all eines von x unabhängigen Mittelwertes ist die Wärmeleitungsleichung bereits in den §§ 21 und 23 aufgestellt und gelöst woren. Es bleibt daher nur noch übrig, zu untersuchen, was sich an en damals durchgeführten Betrachtungen ändert, wenn statt des ittelwertes die genannte Funktion H (x) eingeführt wird.

Der auf der rechten Seite der Wärmeleitungsgleichung (60)in 21 auftretende Gesamtwert H der zugeführten Energie hängt mit er Funktion H (x) durch die Beziehung

$$H = \int_0^l H(x)\,dx \qquad (107)$$

usammen. Infolgedessen erhält man bei der Einführung der Funktion (x) statt der Gleichung (60) die Beziehung:

$$\frac{d^2T}{dx^2} = \frac{1}{\lambda f} \cdot \left[\sigma^{(r)} \cdot \eta \cdot T^4 - l \cdot H(x) \right] \qquad (108)$$

er Einfachheit wegen wird man versuchen, die Lösung dieser Diffeentialgleichung weitestgehend auf die der Gleichung (60) zurückuführen. Es ist also zunächst zu untersuchen, inwieweit sich die eiden Gleichungen (80) und (89), die zur Auflösung von Gleichung 60) aufgestellt wurden (vergl. § 23), beim Übergang von (60) zu 108) ändern.

Betrachtet man zunächst die Gleichung (80), so besitzt diese, enn das Glied $T^{(max)}$ (t) von der linken auf die rechte Seite gechafft wird, die Form:

$$-\frac{\eta\, O^{(r)}}{(\beta+1)\cdot H}\cdot T^{(max)}{}^{\beta+1}_{(t)} = -\frac{\eta\, O^{(r)}}{(\beta+1)\cdot H}\cdot T^{(\ell)}{}^{\beta+1}_{(t)} + \frac{\ell}{2\lambda H}\cdot\beta^2\left[T^{(\ell)}_{(t)}, T_a\right] + \left[T^{(\ell)}_{(t)} - T^{(max)}_{(t)}\right] \cdot$$

und zwar wurde diese Gleichung aus der ursprünglichen Differentialgleichung (60) durch eine Trennung der Veränderlichen erhalten. Eine solche Trennung der Veränderlichen kann nun allerdings bei der Differentialgleichung (108) nicht mehr durchgeführt werden, weil in ihr auf der rechten Seite das von x abhängige Glied H (x) auftritt. Trotzdem kann aber auch die Gleichung (108) rein formal in der gleichen Weise wie bei einer Trennung der Veränderlichen umgeformt werden. Dadurch wird dann, wenn man entsprechend wie in § 23 verfährt, eine Beziehung erhalten, die sich von (109) nur dadurch unterscheidet, dass statt des dort auf der rechten Seite vorkommenden Gliedes $(T^{(\ell)}(t) - T^{(max)}(t))$ jetzt der Ausdruck

$$\frac{\ell}{H}\cdot\int_{T^{(max)}}^{T^{(\ell)}} H(x)\, dT = \frac{\ell}{H}\int_{x_1}^{\ell} H(x)\,\frac{dT}{dx}\,dx$$

auftritt. Damit ist die Änderung, welche die Gleichung (80) beim Übergang von der Differentialgleichung (60) zu der Gleichung (108) erfährt, ermittelt. Um sie zu berücksichtigen, muss auf der rechten Seite von Gleichung (80) das Glied

$$\frac{\ell}{H}\cdot\int_{x_1}^{\ell} H(x)\,\frac{dT}{dx}\,dx - \left(T^{(\ell)} - T^{(max)}\right) \qquad (110)$$

hinzugefügt werden. Die auf diese Weise aus (80) erhaltene neue Gleichung gilt für die beiden Differentialgleichungen (60) und (108) und geht für H = const. in (80) über, da dann der Ausdruck (110) verschwindet.

Für die folgenden Betrachtungen wird der Ausdruck (110) zweckmässigerweise noch etwas umgeformt. Da mittels der Gleichung (80) nur dasjenige Wertepaar $T^{(max)}(t)$, $T^{(\ell)}(t)$ bestimmt werden soll, das zu der gesuchten Temperaturverteilung, d.h. zum Parameter $t = t_0$ gehört, und da für diese Temperaturverteilung die Abzisse x_1 des Temperaturmaximums Null ist, so kann in dem in (110) vorkommenden Integral die untere Grenze $x_1 = 0$ gesetzt werden. Wird ausserdem noch die Gleichung (107) berücksichtigt, so erhält man durch eine einfache Umformung statt (110) den Ausdruck:

$$\sum = \frac{1}{H}\cdot\int_0^{\ell} H(x)\cdot\left\{\ell\cdot\frac{dT}{dx} + \left(T^{(max)} - T^{(\ell)}\right)\right\} dx \qquad (111)$$

der also auf der rechten Seite der Gleichung (80) hinzuzufügen ist.

Um den Einfluss beurteilen zu können, den dieses Änderungsglied $\sum$ in Gleichung (80) ausübt, muss man es mit den übrigen in (80) vorkommenden Gliedern vergleichen. Wählt man als Vergleichs-

glied zunächst die Maximaltemperatur $T^{(max)}$ auf der linken Seite von (80), so ergibt das Verhältnis $\sum/T^{(max)}$ das Mass für die Grösse des von $\sum$ ausgeübten Einflusses. Für $\frac{\sum}{T^{(max)}}$ erhält man, da $T^{(max)}$ von x unabhängig ist, unter Benutzung von Gleichung (107) den Wert:

$$\frac{\sum}{T^{(max)}} = \frac{\int_0^l H(x) \cdot \left\{ l \cdot \frac{dT}{dx} + (T^{(max)} - T^{(l)}) \right\} dx}{\int_0^l H(x) \cdot T^{(max)} \, dx} \qquad (112)$$

Der Wert dieses Bruches ist nun durch Vergleich der im Zähler und im Nenner stehenden Integrale abzuschätzen. Bei dieser Abschätzung soll vorausgesetzt werden, dass die Maximaltemperatur in der Mitte des Gitters liegt. Entsprechend der in § 23 getroffenen Festsetzung ist dann die Untersuchung nur auf die eine Hälfte des Gitters zu erstrecken und die Stelle x = 0 in die Gittermitte zu legen. Diese Koordinatenwahl stimmt allerdings mit derjenigen, welche der Berechnung der in Abb. 16 gezeichneten, angenähert gültigen Verteilungsfunktion H (x) zugrundegelegt wurde, nicht überein, da in Abb. 16 die Stelle x = 0 das eine Gitterende bezeichnet. Soll daher die Abb. 16 auf die jetzt durchzuführende Untersuchung übertragen werden, so sind die dort benutzten Koordinaten x so zu transformieren, dass die Stelle x = 0 in die Mitte des Gitters zu liegen kommt. (vergl. Abb. 17)

Zur Abschätzung des Bruches $\frac{\sum}{T^{(max)}}$ betrachtet man zweckmässigerweise statt der im Zähler und Nenner stehenden Integrale die von ihnen dargestellten Flächen, d.h. die Flächen, die von der Funktion H (x) $\left\{ l \cdot \frac{dT}{dx} + (T^{(max)} - T)^{(l)} \right\}$ einerseits und der Funktion H (x) $T^{(max)}$ andererseits mit der x-Achse gebildet werden. Jede dieser beiden Funktionen besteht aus zwei Faktoren, von denen der eine die Verteilung H (x) der dem Gitter zugeführten Energie darstellt, von der Temperatur des Gitters und ihrer Verteilung längs des Gitters also

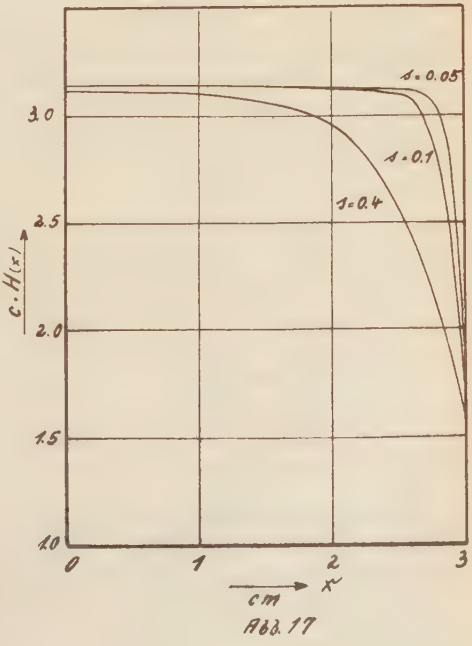


Abb. 17

unabhängig ist, während der zweite durch die Temperaturverteilung bzw. die Maximaltemperatur und Endtemperatur des Gitters bestimmt ist. Da nun der erstgenannte Faktor H (x) in beiden Integranden vorkommt, soll er zunächst unberücksichtigt bleiben. Es sollen also zuerst allein die zuzweit genannten Faktoren $\left\{ l \cdot \frac{dT}{dx} + (T^{(max)} \right.$ bzw. $T^{(max)}$ betrachtet und die durch sie bestimmten Flächen miteinander verglichen werden. Sobald dies geschehen ist, ist es dann leicht, auch die durch die Multiplikation mit dem Faktor H (x) sich ergebenden Flächen, durch welche der Wert des Bruches $\sum / T^{(max)}$ bestimmt ist, miteinander zu vergleichen.

Der im Integranden des Nenners vorkommende Faktor $T^{(max)}$ stellt eine Parallele zur x-Achse dar, die mit dieser ein Rechteck bildet, dessen Inhalt mit f bezeichnet werden soll.

Der Faktor $\left\{ l \cdot \frac{dT}{dx} + (T^{(max)} - T^{(l)}) \right\}$ im Zählerintegranden besitzt an der Stelle x = 0, an welcher definitionsgemäss $\frac{dT}{dx}$ verschwindet (vergl. Gleichung 72), seinen grössten Wert $T^{(max)} - T^{(l)} < T^{(max)}$; er schneidet mit zunehmendem x an der nicht näher bekannten Stelle $x = \bar{x}$ die durch die Gleichung

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=\bar{x}} = \frac{T^{(max)} - T^{(l)}}{l}$$

bestimmt ist, die x-Achse und fällt mit weiter wachsendem x bis an der Stelle $x = l$ einen ebenfalls nicht bekannten niedrigsten Wert annimmt (Abb. 18). Die von dieser Funktion und der x-Achse eingeschlossene Fläche besitzt unter Berücksichtigung des Vorzeichens der beiden über x bis $\bar{x}$ einerseits und $\bar{x}$ bis l andererseits sich erstreckenden Teilflächen den Wert Null, da, wie man leicht nachrechnet,

$$\int_0^l \left\{ l \frac{dT}{dx} + \left(T^{(max)} - T^{(l)}\right) \right\} dx = 0$$

ist. Daraus folgt, dass, wenn die absoluten Werte der beiden genannten Teilflächen mit f_1 bzw. f_2 bezeichnet werden, stets

$$f_1 = f_2$$

sein muss.

Weiterhin kann nun, was für die folgenden Betrachtungen wesentlich ist, gezeigt werden, dass die Teilfläche f_1 stets kleiner als die Fläche f ist. Die Begrenzungskurve $\left\{ l \cdot \frac{dT}{dx} + (T^{(max)} - T \right.$ von f_1 besitzt nämlich ihren kleinsten Abstand von der durch $T^{(max)}$ gelegten Parallelen zur x-Achse an der Stelle x = 0, und zwar ist dieser Abstand gleich der Gitterendtemperatur $T^{(l)}$. Da diese nun mindestens die Grösse der absolut gemessenen Zimmertemperatur (300° abs.) besitzt, muss der genannte Abstand stets erheblich grösser als Null sein. Infolgedessen muss die Fläche f_1 stets erheblich kleiner sein als das Rechteck F, d.h. es ist stets:

$$f_1 \ll F \qquad (113)$$

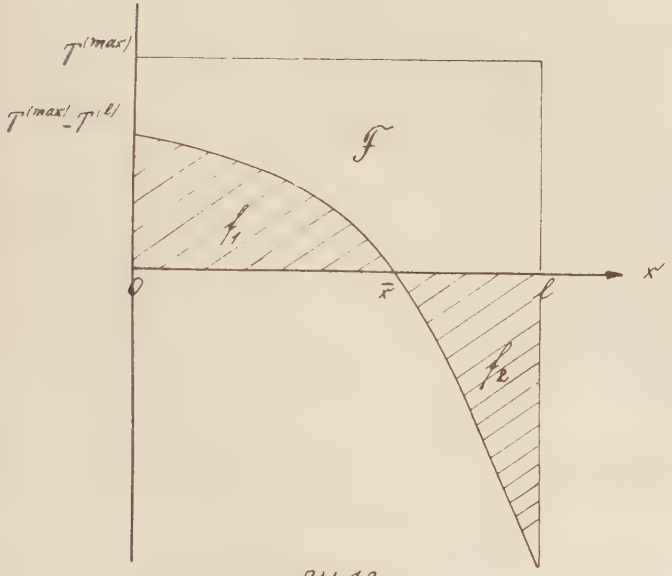


Abb. 18

Weiterhin sollen nun diejenigen Flächen miteinander verglichen rden, welche aus den soeben betrachteten Flächen f_1, f_2, und F urch entstehen, dass die betreffenden Begrenzungskurven mit H(x) tipliziert werden. Die so entstehenden Flächen seien entsprechend $\bar{f}_1$, $\bar{f}_2$ und $\bar{F}$ bezeichnet. Die dem Gitter zugeführte Energie x) besitzt in jedem Fall in der Mitte des Gitters, d.h. an der lle x = 0, ihren grössten Wert; sie fällt mit wachsendem x bis einen niedrigsten Wert, den sie am Gitterende $x = l$ erreicht. olgedessen werden bei der Multiplikation mit H (x), ganz unabgig von der besonderen Form dieser Funktion, die Ordinaten der renzungskurve des Flächenstückes f_1 stets mit grösseren Werten tipliziert als die Ordinaten der Begrenzungskurve von f_2. Da $f_1 = f_2$ ist, so muss folglich:

$$\bar{f}_1 > \bar{f}_2 \qquad (114)$$

n. Was weiterhin das Verhältnis dieser beiden Flächen zu $\bar{F}$ angt, so ist es ohne weiteres klar, dass an der durch (113) dartellten Beziehung durch die Multiplikation mit H (x) nichts gert wird. Infolgedessen ist auch

$$\bar{f}_1 \ll \bar{F} \qquad (115)$$

Erst recht muss dann, wie der Vergleich dieser letzten Beziehung mit der Beziehung (114) zeigt,

$$\bar{f}_2 \ll \bar{F} \qquad (116)$$

sein.

Mit Hilfe dieser Überlegungen kann nun ohne weiteres der Wert des Bruches $\Sigma/T^{(max)}$ abgeschätzt werden. Das im Zähler dieses Bruches stehende Integral wird nämlich durch die Differenz der beiden Flächen $\bar{f}_1$ und $\bar{f}_2$ dargestellt, während das im Nenner vorkommende Integral durch die Fläche $\bar{F}$ wiedergegeben wird. Da nun, wie die Ungleichungen (115) und (116) zeigen, schon jede einzelne der beiden Flächen $\bar{f}_1$ und $\bar{f}_2$ klein gegenüber $\bar{F}$ ist, so muss natürlich erst recht die Differenz $\bar{f}_1 - \bar{f}_2$ klein gegenüber $\bar{F}$ sein. Es ist also in jedem Falle das im Zähler der Gleichung (112) vorkommende Integral wesentlich kleiner als das im Nenner dieser Gleichung stehende, so dass also auch der Wert des Bruches $\Sigma/T^{(max)}$ sehr klein ist.

Damit ist bewiesen, dass das Änderungsglied Σ klein gegenüber der auf der linken Seite der Gleichung (80) stehenden Maximaltemperatur $T^{(max)}$ ist. Da nun auch die übrigen in Gleichung (80) auftretenden Glieder von der gleichen Grössenordnung wie $T^{(max)}$ sind, so kann das Änderungsglied Σ nur einen verhältnismässig geringen Einfluss in der Gleichung (80) ausüben. Infolgedessen kann dieser Einfluss als eine Störung aufgefasst werden, welche die Abweichungen der Funktion H (x) vom Mittelwert in der Gleichung (80) hervorrufen; der Ausdruck kann demgemäss als Störungsglied angesehen werden. Rechnerisch ist dieses Störungsglied dann durch ein Näherungsverfahren zu berücksichtigen.

Die Abschätzung des Störungsgliedes Σ kann in dieser allgemeinen Form nur unter der angegebenen Voraussetzung durchgeführt werden, dass die Maximaltemperatur in der Mitte des Gitters liegt. Ist diese Voraussetzung nicht erfüllt, weil z.B. dem Gitter nur an einem Ende ein erheblicher Energiebetrag durch Wärmeleitung entzogen wird, so fällt die Stelle höchster Temperatur nicht mehr mit der Stelle grösster Energiezufuhr zusammen. Infolgedessen kann in diesem Fall über das Verhältnis der durch die Multiplikation mit H (x) entstehenden Teilflächen $\bar{f}_1$ und $\bar{f}_2$ (vergl. Gleichung 114) nur dann etwas ausgesagt werden, wenn der genaue Verlauf der Funktion H (x) gegeben ist. Die nähere Untersuchung zeigt indessen unter Zugrundelegung der untersten in Abb. 16 dargestellten, näherungsweise gültigen Funktion H (x), dass auch in diesem Fall das Störungsglied Σ noch klein gegenüber den übrigen in Gleichung (80) vorkommenden Gliedern ist.

Für eine gegebene Funktion H (x) kann also die Gittertemperatur in jedem Fall durch ein Näherungsverfahren ermittelt werden. Zur Durchführung dieses Verfahrens ist die Temperatur zunächst für von x unabhängigen Mittelwert der Funktion H (x) nach dem im § 23 angegebenen Verfahren zu berechnen. Dadurch wird eine angenähert richtige Temperaturverteilung T (x) längs des Gitters gefunden, mit

eren Hilfe aus der Gleichung (111) ein Näherungswert für das Stö-
ungsglied Σ erhalten wird. Dieser Näherungswert ist dann als Zu-
atzglied auf der rechten Seite der Gleichung (80) einzuführen. Die
ıflösung der so verbesserten Gleichung ergibt dann Temperaturwer-
e, die eine bessere Annäherung an die wirklichen Temperaturen dar-
tellen, wie die zuerst erhaltenen. Durch Fortsetzung dieses Ver-
ährens kann man den in Wirklichkeit gültigen Temperaturwerten be-
iebig nahekommen.

Die Durchführung dieses Näherungsverfahrens setzt allerdings
oraus, dass die in § 23 zur Berechnung der Gittertemperatur auf-
estellte zweite Gleichung (Gleichung 89) keine Abänderung erfährt,
nn man statt des damals benutzten konstanten Mittelwertes der
geführten Energie die Funktion H (x) benutzt. Diese bisher noch
ffene Frage muss zunächst noch untersucht werden, ehe mit Hilfe
s angegebenen Näherungsverfahrens wirkliche Berechnungen vorge-
ommen werden können. Die Gleichung (89) wurde durch eine Integra -
ion der gegebenen Differentialgleichung (60) gewonnen. Wird die
vorliegenden Falle geltende Differentialgleichung (108) in der
leichen Weise integriert, so ändert sich in den in § 23 angegebe-
n Gleichungen nur dasjenige Glied, welches den Gesamtwert H der
geführten Energie enthält. So tritt in der Gleichung (82) statt
s Gliedes $\frac{l - x_1(t)}{l} \cdot H$ jetzt das Glied

$$\int_{x_1}^{l} H(x)\,dx$$

f, das unter Berücksichtigung von (107) in

$$H - \int_{0}^{x_1} H(x)\,dx$$

geformt werden kann. Statt der Gleichung (86) ergibt sich infol-
dessen jetzt die Beziehung:

$$T^{(l)}(t) = \bar{\mathcal{G}}\left[T_a,\ \mathcal{P}(t) - \int_{0}^{x_1} H(x)\,dx\right] \qquad (117)$$

rin $\mathcal{P}$ (t) genau wie früher durch (84) definiert ist. Aus der Glei-
ung (86) wurde in § 23 die für die Hilfstemperatur $T^{(l)^*}(t)$ gelten-
Gleichung (87) dadurch gewonnen, dass das in (86) auftretende
bekannte Glied $\frac{x_1(t)}{l}$. H fortgelassen wurde. Es ergab sich dann
e durch Gleichung (88) ausgedrückte Beziehung, die besagt, dass
lfs- und Endtemperatur an der Stelle $t = t_0$, also für die tatsäch-
ch vorhandene Temperaturverteilung, einander gleich sind. Genau
tsprechend lässt sich auch aus der Gleichung (117) die Gleichung
r die Hilfstemperatur dadurch herleiten, dass in (117) das Inte-
al über H (x) fortgelassen wird. Man erkennt, dass dann für die
lfstemperatur $T^{(l)^*}(t)$ eine Gleichung erhalten wird, die mit Glei-
ung (87) vollkommen identisch ist, mit dem einzigen Unterschied,
ss der in der Hilfsfunktion P(t) vorkommende Wert $\frac{dT}{dx}$ aus der

Differentialgleichung (108) statt aus (60) bestimmt werden muss. Ferner gilt ebenso wie in § 23 die Beziehung (88), welche die Gleichheit von Hilfs- und Endtemperatur an der Stelle $t = t_0$ zum Ausdruck bringt.

Danach gilt die Gleichung (87) für die Hilfstemperatur $T^{(l)}$ mit allen aus ihr gezogenen Folgerungen sowohl für die bei konstantem H geltende Differentialgleichung (60), als auch für die bei Einführung der Funktion H (x) gültige Differentialgleichung (108). Infolgedessen muss auch die Gleichung (89), welche sich aus (87) durch eine einfache Variablentransformation ergibt, ebenfalls für die beiden Differentialgleichungen (60) bzw. (108) gültig sein. Diese Gleichung (89), welche die zweite Beziehung für die Berechnung der Gittertemperatur liefert, gilt also auch dann, wenn statt des von x unabhängigen Mittelwertes der zugeführten Energie die von x abhängige Verteilungsfunktion H (x) in die Wärmeleitungsgleichung eingeführt wird.

Nach diesen vorbereitenden Überlegungen kann nun der Fehler abgeschätzt werden, der entsteht, wenn statt der Verteilungsfunktion H (x) ein für alle x-Werte gleicher Mittelwert dieser Funktion in die Wärmeleitungsgleichung eingeführt wird. Dazu muss mittels des soeben beschriebenen Näherungsverfahrens für die oben angegebene näherungsweise gültige Funktion H (x) die Gittertemperatur bestimmt und mit derjenigen Temperatur verglichen werden, die man nach dem in § 23 beschriebenen Verfahren für den Mittelwert dieser Funktion erhält. Der Unterschied zwischen den beiden so gewonnenen Temperaturwerten wird sicherlich, wie aus der für das Störungsglied Σ gefundenen Gleichung (111) ersichtlich ist, sehr wesentlich von der Grösse des Temperaturgradienten, d.h. also von der Grösse der Temperaturunterschiede im Gitter abhängen. Um diese Abhängigkeit klar zum Ausdruck zu bringen, wurde die Rechnung für zwei verschiedene Fälle durchgeführt, und zwar wurde in dem ersten Fall vorausgesetzt, dass die Gitterstreben aus dem gut wärmeleitenden Kupfer bestehen und dass die Wärmeableitung nach aussen gering ist, während im zweiten Fall angenommen wurde, dass schlecht wärmeleitende Nickelstreben verwendet werden und dass eine grosse Wärmemenge nach aussen abgeleitet wird. Es sind dann im ersten Falle die Unterschiede zwischen der Maximal- und Endtemperatur des Gitters, welche sich unter Zugrundelegung des Mittelwertes der dem Gitter zugeführten Energie also ohne Berücksichtigung des Störungsgliedes Σ ergeben, sehr gering. Sie betragen etwa 3 ½ % , während im zweiten Falle bereits die so erhaltenen Temperaturuntersohiede eine erhebliche Grösse besitzen und rund 35 % ausmachen. Das Ergebnis der für diese beiden Fälle durchgeführten Fehlerabschätzung ist in Tabelle VI zusammengestellt.

Tabelle VI

	1. Fall gut wärmeleitende Streben			2. Fall schlecht wärmeleitende Streben		
	Σ	$T^{(max)}$	$T^{(l)}$	Σ	$T^{(max)}$	$T^{(l)}$
1.Näherung berechnet für den Mittelwert von H(x)	--	790°	764°	--	755°	500,5°
2.Näherung	1,4°	791,5°	762°	17,4°	765°	498°
3.Näherung	2,0°	792,2°	761°	18,4°	765,5°	497,8°
Abweichung:	--	0,3%	0,4%	--	1,4%	0,5%

Die Tabelle enthält die für die Maximal- und Endtemperatur es Gitters, sowie die für das Störungsglied Σ in jedem der beiden älle gefundenen Werte. Dabei sind in der ersten Zeile die in erster äherung gefundenen Gittertemperaturen angegeben, die unter Benut- ung des von x unabhängigen Mittelwertes der Funktion H (x) berech- et wurden. Die zweite und dritte Zeile enthalten diejenigen Werte, ie unter Verwendung der untersten in Abb. 17 dargestellten Verteiungsfunktion H (x) gewonnen wurden. Dabei sind die Störungsglieder Σ der zweiten Zeile aus den in der ersten Näherung bekannten Temeraturwerten erhalten worden. Die mit Hilfe dieser Störungsglieder estimmte zweite Näherung der Gittertemperatur ist ebenfalls in der weiten Zeile angegeben. Unter Benutzung dieser zweiten Näherung urden dann die in der dritten Zeile wiedergegebenen Störungsglieer Σ gefunden, deren Berücksichtigung schliesslich die in der gleihen Zeile angeführten dritten Näherungswerte für die Gittertempeaturen lieferte.

Die Zusammenstellung zeigt, dass selbst bei den grossen Unterchieden zwischen der Maximal-und der Endtemperatur des Gitters, wie ie infolge der schlecht wärmeleitenden Streben im zweiten Falle uftreten, das Störungsglied immer noch sehr klein gegenüber den eiden Temperaturwerten $T^{(max)}$ und $T^{(\infty)}$ ist, so dass man tatsächich berechtigt ist, den Einfluss dieses Gliedes in der Gleichung 80) als Störung aufzufassen. Infolge der Kleinheit des Störungsliedes ist auch die Konvergenz des Näherungsverfahrens, wie aus en angegebenen Temperaturwerten hervorgeht, gut genug, so dass man ich für die Fehlerabschätzung mit den in der dritten Näherung beechneten Werten zufrieden geben kann.

Die zwischen den Temperaturwerten in der dritten und in der rsten Näherung berechneten Unterschiede sind schliesslich noch, in rozenten ausgedrückt, in der letzten Zeile der Tabelle angegeben. s geht daraus hervor, dass der Fehler, der durch die Benutzung des on x unabhängigen Mittelwertes der zugeführten Energie an Stelle er wirklich vorhandenen Verteilungsfunktion H (x) entsteht, selbst n dem für die Rechnung ungünstigen Fall des schlecht wärmeleiten- en Gitters nur etwa 1 ½% beträgt. Ein Fehler in dieser Grösse kann ber in Anbetracht der übrigen Fehlerquellen und insbesondere mit icksicht auf die nicht ganz sicher festliegenden Strahlungskonstanen ohne weiteres in Kauf genommen werden. Solange daher eine weentlich genauere Berechnung der Gittertemperatur sowieso nicht mögich ist, wird man dieser Berechnung stets den erwähnten Mittelwert er zugeführten Energie zugrundelegen dürfen und die genaue Verteiung dieser Energie längs des Gitters nicht zu berücksichtigen brauhen.

Damit ist gezeigt worden, dass auch die in der Zusammenfassung es § 26 an letzter Stelle angeführte Voraussetzung hinreichend erüllt ist. Nachdem dasselbe im Anfang dieses Paragraphen auch für ie andere zur Berücksichtigung der Wärmeleitung erforderliche Vorussetzung bewiesen worden ist, können nun die beiden Voraussetzungen ie, wie oben erwähnt, einzeln experimentell nicht nachgeprüft werden können, zusammen der experimentellen Prüfung unterzogen werden. an wird auf Grund der bisher gemachten Überlegungen erwarten dürfen, dass die dabei gefundenen Abweichungen zwischen den berechneen und den gemessenen Gittertemperaturen nicht erheblich grösser ind, als die Fehler, welche durch die ungenaue Kenntnis der Strahungsgesetze und des Reflexionsvermögens der verwendeten Werkstoffe edingt sind.

Für diese experimentelle Nachprüfung, deren Ergebnisse im folgenden mitgeteilt werden sollen, wurde das in § 28 beschriebene dem idealisierten ähnliche Gitter so umgeändert, dass im Gegensatz zu vorher eine erhebliche Wärme abgeleitet wurde. Dazu wurde die Länge des Gitters von 80 auf 40 mm, d.h. auf die Hälfte verringert, der Querschnitt der Gitterstreben verdreifacht und jedes der vier Strebenenden mit einem 1,2 cm^2 grossen, geschwärzten Kühlflügel versehen. Einem derartigen Gitter wird über die Kühlflügel ein erheblicher Energiebetrag entzogen. Die dadurch bedingte Erniedrigung der Gittertemperatur wird sich nicht allein am Gitterende bemerkbar machen, sondern muss sich wegen der geringen Länge des Gitters und des verhältnismässig grossen Strebenquerschnittes auch auf die zu messende Maximaltemperatur in der Mitte des Gitters auswirken. Durch den Zusammenbau eines solchen Gitters mit anderen Elektroden wird also ein System erhalten, bei welchem die Gitterhöchsttemperatur in starkem Masse durch die vom Gitter abgeleitete Wärmemenge beeinflusst wird. Mittels einer solchen Röhre kann daher die Gültigkeit der beiden oben besprochenen, für ein wärmeleitendes Gitters gültigen Voraussetzungen zuverlässig geprüft werden.

Die Messung der Gittertemperatur dieser Röhre wurde genau so durchgeführt wie die in § 28 beschriebene Messung am nicht wärmeleitenden Gitter. Die Berechnung der Maximaltemperatur des Gitters erfolgte in der im § 25 angegebenen Weise, und zwar wurde dem Vergleich mit den gemessenen Werten die zweite Näherung der Maximaltemperatur zugrundegelegt. Zu dieser Berechnung sind die Determinanten u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22} und N aus Gleichung (98) zu ermitteln. Die weiterhin heranzuziehende Wärmeleitungsgleichung (60) ist in diesem Fall, in welchem die Maximaltemperatur in der Mitte des Gitters liegt, nur für die eine Hälfte des Gitters aufzustellen. Da als Werkstoff für die Gitter Nickel verwendet wurde, so sind das für Nickel geltende Ausstrahlungsgesetz (101) und der bekannte Wert des Wärmeleitvermögens für Nickel in die Wärmeleitungsgleichung einzusetzen. Die in der Wärmeleitungsgleichung auftretende Wärmeableitungsfunktion G ($T, \overset{(\ell)}{T}a$) ergibt sich, da die Wärme durch Kühlflügel abgeführt wird, aus Gleichung (99b). (Die rechte Seite dieser Gleichung wurde noch mit dem Emissionsvermögen 0,9 der Kühlflügel multipliziert).

Die Ergebnisse des Vergleiches sind in der Tabelle VII wiedergegeben.

Tabelle VII

$T_1^{(s)}$	T_2'	$T_2^{(max)(ber)}$	$T_2^{(\ell)(ber)}$	$T_2^{(max)(gem)}$	Abweichu
1207°	1046°	870°	627°	895°	+ 3 %
1140°	998°	804°	599°	825°	+ 2½%
1090°	963°	756°	578°	770°	+ 2 %
1027°	918°	699°	550°	700°	0 %
972°	880°	650°	526°	640°	- 1½%
1135°	995°	800°	596°	830°	+ 3½%
1072°	950°	740°	570°	760°	+ 2½%
997°	897°	672°	537°	675°	+ ½%

s)	T_2	$T_2^{(max)(ber)}$	$T_2^{(\ )(ber)}$	$T_2^{(max)(gem)}$	Abweichung
9°	1062°	893°	637°	925°	+ 3½%
3°	1008°	816°	604°	850°	+ 4 %
7°	947°	735°	568°	760°	+ 3½%
7°	904°	681°	541°	690°	+ 1½%

Tabelle enthält in der ersten Spalte die Werte der schwarzen peratur $T_1^{(s)}$ der Kathode, für welche die Rechnung bzw. Messung chgeführt wurde. In der zweiten Spalte steht diejenige Tempera- T_2',welche das Gitter beim Fehlen jeglicher Wärmeableitung be- zen würde. Die unter Berücksichtigung der Wärmeleitung berech- en Maximal- und Endtemperaturen des Gitters sind in der dritten . vierten Spalte eingetragen. Ein Vergleich der Maximaltempera- in der dritten Spalte mit den Werten der zweiten Spalte zeigt grossen Einfluss, welchen die Wärmeabfuhr durch die Kühlflügel die Gittertemperatur ausübt. Weiterhin zeigt aber noch der Ver- ich der in der dritten und vierten Spalte stehenden Werte, dass olge der Wärmeleitung ganz erhebliche Temperaturuntersohiede gs des Gitters auftreten. Die untersuchte Röhre eignet sich also eine einwandfreie Prüfung der beiden sich auf das wärmeleitende ter beziehenden Voraussetzungen. Die fünfte Spalte der Tabelle hält die gemessenen Werte der Gittermaximaltemperatur, und in letzten Spalte der Tabelle sind schliesslich die prozentischen eichungen zwischen den gemessenen und berechneten Maximaltempe- uren des Gitters eingetragen.

Die Ergebnisse zeigen, dass die grösste auftretende Abweichung oeträgt. Diese Abweichung ist nur um 1% grösser als der Fehler, durch die ungenaue Kenntnis der Strahlungsgesetze und der Wer- für das Reflexionsvermögen bedingt ist. Die Vergrösserung die- Fehlers wird nach dem Ergebnis der vorher vorgenommenen Rech- gen in erster Linie darauf zurückzuführen sein, dass bei der Be- nnung der Gittertemperatur mit dem Mittelwert der zugeführten rgie statt mit der nicht genau bekannten Verteilungsfunktion x) dieser Energie längs des Gitters gerechnet wurde. Der Vergleich experimentell gefundenen mit den berechneten Werten zeigt aber, s selbst in dem hier betrachteten Fall ausserordentlich starker meleitung und damit sehr grosser längs des Gitters auftretender peraturuntersohiede der gefundene Fehler so gering ist, dass er der praktischen Anwendung des Verfahrens nicht stört. Durch die- Ergebnis wird also die vorhin ausgesprochene Vermutung durch- bestätigt, dass nämlich die beiden Voraussetzungen, welche bei Berechnung der Gittertemperatur zur Berücksichtigung der Wärme- tung angenommen werden mussten, hinreichend erfüllt sind.

§ 31 Die Temperatur des realen Gitters

Die in den vorhergehenden Paragraphen beschriebenen Unter- nungsergebnisse zeigen, dass die Temperatur eines Gitters, bei chem die Dicke einer Windung bzw. Strebe klein gegenüber der

Breite dieser Teile ist, mit einer Genauigkeit von 4% berechnet werden kann. Ein derartiges Gitter kann als Verwirklichung des in § 14 eingeführten idealisierten Gitters angesehen werden. Die experimentelle Untersuchung der einzelnen Fehlerquellen hat ferner gezeigt, dass der grösste Teil des Gesamtfehlers von 4% nicht auf die zur Durchführung der Berechnung anzunehmenden Voraussetzungen zurückzuführen ist, sondern darauf, dass die Strahlungsgesetze und die Werte des Reflexionsvermögens für die praktisch verwendeten Elektrodenwerkstoffe nicht genügend bekannt sind. Es muss nun schliesslich noch die wichtige Frage untersucht werden, welcher Fehler dadurch entsteht, dass die für das idealisierte Gitter durchgeführten Rechnungen auf das in der Röhre wirklich vorhandene reale Gitter, bei welchem also die Dicke der Windungen bzw. Streben nicht mehr klein gegenüber ihrer Breite ist, übertragen werden. Der Übergang vom idealisierten zum realen Gitter wurde im § 21 unter der Voraussetzung durchgeführt, dass bei gleicher Kathodentemperatur die auf die Gitter auftreffende Strahlungsmenge in beiden Fällen gleich gross ist. Ist diese Voraussetzung nicht genau erfüllt, ändert sich also die auftreffende Strahlungsmenge beim Übergang vom idealisierten zum realen Gitter, so werden die für das idealisierte Gitter berechneten Temperaturen mehr oder weniger von den im realen Gitter tatsächlich vorhandenen Temperaturwerten abweichen. Infolgedessen wird sich, wenn man die für das idealisierte Gitter gefundenen Temperaturwerte auf das reale Gitter überträgt, ein gewisser Fehler ergeben, dessen Grösse im folgenden ermittelt werden soll.

Um zunächst einen gewissen Überblick über die Änderung der auftreffenden Strahlungsmenge beim Übergang vom idealisierten zum realen Gitter zu gewinnen, muss man diese Strahlungsmenge in ihre beiden Bestandteile, den direkt auftreffenden Strahlungsanteil und den nach einer mehr oder weniger grossen Zahl von Reflexionen auftreffenden Anteil zerlegen. Der zuerst genannte direkte Anteil lässt sich, wie später gezeigt werden wird, rechnerisch ermitteln. Dagegen ist eine solche Berechnung für den zuzweit genannten, reflektierten Anteil nicht durchführbar, weil nach den in § 14 durchgeführten Überlegungen die Gradientenbedingung für das reale Gitter nicht erfüllt ist und weil infolgedessen die auf die reflektierte Strahlung bezüglichen Koeffizienten r_{ik} für ein solches Gitter nicht berechnet werden können. Wenn daher der Gesamtfehler, der beim Übergang vom idealisierten zum realen Gitter gemacht wird rechnerisch auch nicht bestimmt werden kann, so wird es doch zweckmässig sein, die bei diesem Übergang sich ergebenden Verhältnisse so weit wie möglich zu klären. Dazu gehört einmal die Feststellung desjenigen Fehlers, der durch die Änderung des direkten Strahlungsanteiles verursacht wird, und weiterhin die Ermittlung des Anteiles, den jede der beiden Strahlungsarten an der gesamten auf das Gitter auftreffenden Strahlungsmenge besitzt. Die hierzu erforderlichen Rechnungen sollen daher zunächst behandelt werden.

Zur Ermittlung der Änderung, welche die direkte Strahlung beim Übergang vom idealisierten zum realen Gitter erfährt, müssen die für das idealisierte Gitter sich ergebenden Koeffizienten e_{ik} mit denjenigen Koeffizienten verglichen werden, die man für das entsprechende reale Gitter erhält. Die Berechnung der Koeffizienten e_{ik} ist auch für das reale Gitter möglich, weil die Menge der direkt auf das Gitter auftreffenden Strahlung im Gegensatz zur re-

flektierten Strahlung allein durch die geometrischen Verhältnisse gegeben ist; zur Berechnung der e_{ik} müssen die in § 7 abgeleiteten Formeln benutzt werden. Im folgenden soll diese Berechnung an Hand eines Beispieles, bei welchem die Verhältnisse besonders einfach liegen, kurz behandelt werden.

Es soll der Strahlungsübergang von der Kathode zu einer einzelnen Windung eines realen Gitters betrachtet werden. In der Abb. 19 ist ein Schnitt durch die Kathode und die betrachtete Windung in Richtung der Kathodenachse wiedergegeben, und es sind darin die verwendeten Bezeichnungen eingetragen worden. Zur Vereinfachung der Rechnung wird angenommen, dass die Entfernung s zwischen dem Kathodenpunkt Z = 0 und allen Punkten in der Mitte der Gitterwindung als konstant, d.h. unabhängig vom Winkel φ, angesehen werden kann. (vergl. Abb. 20, die einen Horizontalschnitt durch die Kathode und die Gitterwindung darstellt.) Die Entfernung s ist dann gleich $r_2 - r_1$. Der zu dem betrachteten Strahlungsübergang gehörende Koeffizient möge mit $\overline{e}_{21}$ bezeichnet werden; seine Grösse ergibt sich aus der Gleichung (12) in § 7. Die hieraus erhaltene Beziehung lautet, wenn an Stelle der in (12) vorkommenden Flächenkoordinaten p und q die Zylinderkoordinaten z und $r_1\varphi$ eingeführt werden:

$$\overline{e}_{21} = \frac{r_1}{\pi O_1} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \overline{u}_{21}(\varphi, z)\, d\varphi\, dz \qquad (118)$$

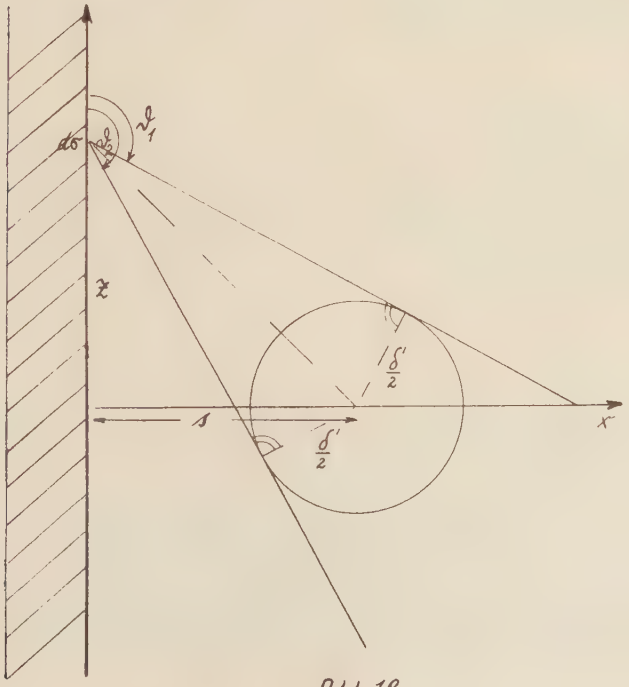


Abb. 19

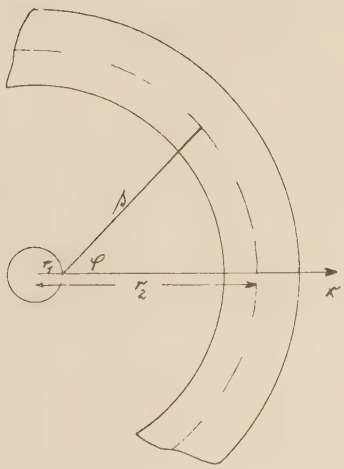


Abb. 20

Die in dieser Gleichung auftretende Wärmeübertragungsfunktion $\overline{U_{21}}(\psi, z)$ ist mit Hilfe der Gleichung (9) in § 7 zu ermitteln. Zu diesem Zwecke sind zunächst die Grenzwinkel φ_1, φ_2 und ϑ_1, ϑ_2 zu bestimmen. Für φ_1 und φ_2 ergeben sich die festen Winkel $\varphi_1 = -\frac{\pi}{2}$ und $\varphi_2 = +\frac{\pi}{2}$. ϑ_1 und ϑ_2 sind von der Koordinate z des strahlenden Flächenelementes $d\sigma$ abhängig, und zwar ergeben sich aus Abb. 19 dafür die beiden Beziehungen:

$$\vartheta_1 = \pi - \operatorname{arctg}\frac{1}{z} - \arcsin\frac{\delta'}{2\sqrt{s^2+z^2}}$$

$$\vartheta_2 = \pi - \operatorname{arctg}\frac{1}{z} + \arcsin\frac{\delta'}{2\sqrt{s^2+z^2}} \qquad (119)$$

wenn δ' den Durchmesser der Gitterwindung bedeutet. Die für die vier Grenzwinkel gefundenen Werte sind weiterhin nun in die Gleichung (9) für $\overline{U_{21}}$ einzuführen. Da s konstant ist, lassen sich dann die beiden in der Gleichung vorkommenden Integrationen ausführen, und es wird:

$$\overline{U_{21}}(\psi, z) = \left[\vartheta - \frac{1}{2}\sin 2\vartheta\right]_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}$$

Durch Einsetzen dieses Ausdruckes in Gleichung (118) erhält man schliesslich nach Ausführung der Integration über ψ für den Koeffizienten $\overline{e_{21}}$ die Beziehung:

$$\overline{e_{21}} = \frac{1}{\pi l}\cdot\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}}\left[\vartheta - \frac{1}{2}\sin 2\vartheta\right]_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} dz \qquad (120)$$

welche unter Benutzung der Werte (119) für ϑ_1 und ϑ_2 graphisch zu integrieren ist.

Es wurde nun auf diese Weise der dem realen Gitter zugeordnete Koeffizient $\overline{e_{21}}$ zahlenmässig berechnet und mit dem Koeffizienten e_{21}, der sich auf eine Windung des entsprechenden idealisierten Gitters bezieht, verglichen. Die Kathode wurde dabei als unendlich lang angesehen. Für den Windungsdurchmesser wurde der Wert $\delta = 0{,}1$mm gewählt und die Berechnung für die drei Werte s gleich 0,15; 0,5 und 1,0 mm der Entfernung von der Kathodenoberfläche bis zur Win-

dungsmitte durchgeführt. In allen drei Fällen wurde für das Verhältnis $\frac{\overline{e_{21}}}{e_{21}}$ der Wert 1,23 erhalten. Aus diesem Verhältniswert ergibt sich nun sofort die Änderung der auf die Gitterwindung auftreffenden Strahlungsmenge beim Übergang vom idealisierten zum realen Gitter. Da nämlich bei konstanter von der Kathode ausgestrahlter Energie die auf eine Elektrode K auftreffende Strahlungsmenge proportional dem zugehörigen Koeffizienten e_{kl} ist, so folgt aus dem für das Verhältnis $\frac{\overline{e_{21}}}{e_{21}}$ gefundenen Wert 1,23, dass die unmittelbar von der Kathode zu einer Gitterwindung übergehende Strahlungsmenge bei einem realen Gitter um 23 % grösser ist als bei dem entsprechenden idealisierten Gitter (unabhängig vom Abstand zwischen Kathode und Gitter).

Eine ähnliche Berechnung wie die soeben für den Strahlungsübergang zwischen der Kathode und einem Gitter angestellte, liesse sich auch für den Übergang der direkt auftreffenden Strahlung von den übrigen Elektroden zum untersuchten Gitter durchführen. Mit Rücksicht darauf, dass diese Rechnung erheblich umständlicher als die soeben durchgeführte ist und dass sie keine wesentlich euen Erkenntnisse bringen würde, wurde jedoch auf ihre Ausführung verzichtet. Nimmt man an, dass auch in diesen Fällen die unmittelbar auftreffende Strahlungsenergie in ungefähr dem gleichen Masse vergrössert wird wie beim Strahlungsübergang von der Kathode zum Gitter, so würde sich ergeben, dass bei fehlender Reflexion und unter der Voraussetzung gleicher Kathodentemperatur die Temperatur des realen Gitters um etwa 5 % _ nämlich 23 % dividiert durch den Exponenten 5 des Ausstrahlungsgesetzes - höher liegt als die Temperatur des entsprechenden idealisierten Gitters.

In Wirklichkeit darf natürlich wegen des hohen Reflexionsvermögens der Metalle die reflektierte Strahlung bei der Ermittlung der Gittertemperatur keinesfalls vernachlässigt werden. Um nun beurteilen zu können, in welchem Masse sich die Vergrösserung der direkten Strahlung auf den Gesamtfehler auswirkt, der beim Übergang vom idealisierten zum realen Gitter gemacht wird, soll schliesslich auch noch untersucht werden, welchen Bruchteil die direkt auftreffende Strahlung innerhalb der gesamten einem Gitter zugestrahlten Energie bei einer normalen Empfängerröhre ausmacht. Die zu diesem Zweck durchgeführte Rechnung sei im folgenden an Hand eines Beispiels beschrieben.

Für eine gegebene Röhre mit vier Elektroden wurde das Grundgleichungssystem (29) aufgestellt und nach seinen sämtlichen Unbekannten einschliesslich der reflektierten Energien aufgelöst. Jede dieser Unbekannten gibt dann zahlenmässig die von einer Seite einer bestimmten Elektrode emittierte bzw. reflektierte Energie an. Weiterhin wurden die so ermittelten Zahlenwerte der Unbekannten in die für das Steuergitter geltende zweite Gleichung des Grundgleichungssystems eingeführt. Man erhält dann auf der rechten Seite dieser Gleichung eine Reihe von Summanden. Ihre Werte sind entsprechend ihrer Zugehörigkeit zu den einzelnen Unbekannten in der Tabelle III unter der Voraussetzung zusammengestellt, dass die der Kathode zugeführte Energie W_1 gleich Eins ist. Jeder dieser Summanden stellt,

wie aus der Definition der Grundgleichungen folgt (vergl. § 6), diejenige Energie dar, welche das betrachtete Steuergitter von der zugehörigen über dem betreffemden Summanden stehenden Strahlungsart absorbiert.

Tabelle VIII

E_1	E_2	E_3	E_4	$E_1^{(ra)}$	$E_2^{(ri)}$	$E_2^{(ra)}$	$E_3^{(ri)}$	$E_3^{(ra)}$	$E_4^{(ri)}$
0,0478	0,0010	0,0014	0,0018	0,0027	0,0083	0	0,0100	0	0,019

Man ersieht also aus der Tabelle, in welcher Weise sich die dem Gitter zugestrahlte Energie auf die einzelnen Strahlungsarten verteilt. (In dem gewählten Beispiel ist die von der Kathode auf das Steuergitter reflektierte Energie verhältnismässig gering, was darauf zurückzuführen ist, dass für die Rechnung eine mit Uranoxyd ($\rho_1 = 0,2$) bedeckte Kathode zugrundegelegt wurde.)

Aus der Tabelle VIII ergibt sich nun sofort die gesuchte Zusammensetzung der dem Gitter zugeführten Energie aus der direkt übertragenen und der reflektierten Strahlung. Jeder dieser beiden Teile wird nämlich durch Addition derjenigen Summanden in der Tabelle erhalten, die zu der direkt bzw. zu der nach Reflexionen auf das Steuergitter übertragenen Strahlung gehören. Demgemäss liefert die Summation der in den ersten vier Spalten stehenden Werte die direkt zugeführte Strahlung $H^{(d)}$, und die Summation der übrigen sechs Werte die nach einer mehr oder weniger grossen Zahl von Reflexionen auf das Gitter übertragene Strahlung $H^{(r)}$, und zwar wird:

$$H^{(d)} = 0.0520 \qquad H^{(r)} = 0.0409$$

Man ersieht hieraus, dass die nach einer Reihe von Reflexionen dem Gitter zugeführte Strahlungsenergie fast ebenso gross ist wie die direkt übertragene Energie. Folglich muss die reflektierte Strahlung beim Übergang vom idealisierten zum realen Gitter in genau dem gleichen Masse wie die direkte Strahlung berücksichtigt werden.

Könnte man nun annehmen, dass beim Übergang vom idealisierten zum realen Gitter die durch Reflexionen auf das Gitter übertragene Strahlung im gleichen Verhältnis geändert wird wie die direkte Strahlung, für welche vorhin rechnerisch eine Erhöhung von 23 % gefunden wurde, so müsste die tatsächlich vorhandene Temperatur des realen Gitters um 5 % grösser sein als die berechnete. In Wirklichkeit ist diese Annahme aber in keiner Weise zu begründen. Im Gegenteil, man könnte sich vorstellen, dass die auf das reale Gitter reflektierte Strahlung kleiner ist als die auf ein entsprechend idealisiertes Gitter reflektierte. Da nämlich das reale Gitter einen grösseren Betrag der direkt übertragenen Strahlung auffängt, so muss die durchgelassene Strahlungsmenge im Falle des realen Gitters kleiner sein als im Falle des idealisierten. Infolgedessen ist es durchaus möglich, dass die Strahlungsmenge, die von den ausserhalb des betrachteten Gitters gelegenen Elektroden auf dieses zurückgeworfen wird, beim realen Gitter geringer ist als beim entsprechenden idealisierten Gitter. Aus alledem folgt jedenfalls, dass man über die Grösse des beim realen Gitter zu erwartenden Unterschiedes zwischen der berechneten und der tatsächlich vorhandenen Temperatur keine irgend

ie sicher begründete Aussage machen kann. Infolgedessen kann die rösse des bei der Berechnung entstehenden Fehlers einzig und al- ein durch das Experiment festgestellt werden.

Für die Versuche zur Bestimmung der Temperatur des realen itters, über welche nunmehr berichtet werden soll, wurden Gitter us normalen Empfängerröhren benutzt. Um unter Verhältnissen zu rbeiten, welche den in der Praxis vorliegenden möglichst nahe- ommen, sollte die Untersuchung bei den in normalen Röhren üblichen athodentemperaturen vorgenommen werden. Dadurch war die Art der emperaturbestimmung am Gitter von vornherein gegeben; sie konnte, a eine pyrometrische Messung ebenso wie die Messung des Widerstan- es des Gitters viel zu ungenau geworden wäre, nur mit Hilfe ther- oelektrischer Messungen durchgeführt werden. Um eine Störung der emperaturverhältnisse durch ein aufgeschweisstes Thermoelement u vermeiden, wurde die Gitterstrebe selbst als Thermoelement aus- ebildet, indem die eine Hälfte aus Nickel, die andere aus Chrom- ickel angefertigt wurde. Man erhält auf diese Weise ein Thermo- lement, dass eine ausreichende Thermospannung besitzt, so dass amit die Temperatur in der Mitte des Gitters genügend genau be- timmt werden kann. Durch den unvermeidbaren Nebenschluss, welchen ie Windungen des Gitters zu diesem Strebenthermoelement bilden, ird, wie festgestellt wurde, die Thermokraft nur wenig verringert. ie Eichung des Elements erfolgte derart, dass nach Beendigung des ersuches die Röhre aufgeschnitten und die E.M.K. des betreffenden lementes bei verschiedenen Temperaturen mit der eines Platin-Pla- inrhodiumelementes verglichen wurde.

Die Messung der Gittertemperatur wurde an drei verschiedenen öhrentypen durchgeführt, und zwar an zwei Dreielektroden- und einer ierelektrodenröhre. Die Abmessungen der Vierelektrodenröhre sind n Anhang angegeben. Von den Dreielektrodenröhren besass die eine inen Aufbau ähnlich wie REN 1004 (Gitterwindungen aus Nickeldraht) nd die andere einen Aufbau ähnlich wie REN 904 (Gitterwindungen us Molybdändraht). Die Änderungen, die an dem Aufbau dieser öhren vorgenommen wurden, beschränkten sich darauf, dass alle Elek- roden gleich lang (ℓ = 31 mm) gemacht und dass die normalerweise orhandene Gazeanode durch eine massive Anode ersetzt wurde. Ferner urden beide Enden des zu untersuchenden Gitters mit Zuführungen ersehen, die in ihren Abmessungen vollkommen gleich waren. Infol- edessen werden an den beiden Enden gleiche Wärmemengen abgeleitet, o dass die höchste Temperatur in der Gittermitte liegen muss, also erade an der Stelle, an welcher sich auch die Schweisstelle des hermoelementes befindet.

Von jeder Röhrensorte wurden mehrere Exemplare hergestellt. ie Temperatur der mit Uranoxyd geschwärzten Kathode wurde an ver- chiedenen Stellen gemessen; aus den so erhaltenen Werten wurde nn graphisch, so wie dies bei den Röhren mit dem idealisierten itter beschrieben ist (vergl. § 28), ein Mittelwert der Kathoden- emperatur bestimmt.

Die Berechnung der Maximaltemperatur des Gitters wurde genau o wie die im vorigen Paragraphen beschriebene Berechnung der Tem- eratur des wärmeleitenden idealisierten Gitters durchgeführt. ei den Dreielektrodenröhren wurde die Temperatur unter Berücksich- igung des Wärmeleitungsgliedes $(h_{22} - 1)\, Q_2$ in Gleichung (70) bis ur zweiten Näherung berechnet, während bei der Vierelektrodenröhre sserdem auch noch der Einfluss der Wärmeleitung des zweiten Git-

ters, dessen Temperatur nicht gemessen wurde, auf die Temperatur des untersuchten ersten Gitters durch eine dritte Näherung berücksichtigt wurde.

Die gemessenen und berechneten Werte sind in den folgenden drei Tabellen zusammengestellt:

Tabelle IX

Dreielektrodenröhre ähnlich REN 1004 (jedoch mit massiver Anode)

T_1 (s)	T_2 (gem)	T_2 (ber)	Abw.	T_1 (s)	T_2 (gem)	T_2 (ber)	Abw.
1213°	875°	861°	+ 1½%	1120°	815°	786°	+ 3½%
1158°	840°	818°	+ 2½%	1072°	765°	745°	+ 2½%
1073°	755°	746°	+ 1 %	1017°	710°	697°	+ 2 %
979°	680°	662°	+ 2½%	967°	660°	651°	+ 1½%
1180°	845°	836°	+ 1 %				
1071°	745°	744°	0 %				
980°	655°	663°	- 1 %				

Tabelle X

Dreielektrodenröhre ähnlich REN 904 (jedoch mit massiver Anode)

T_1 (s)	T_2 (gem)	T_2 (ber)	Abw.	T_1 (s)	T_2 (gem)	T_2 (ber)	Abw.
1179°	820°	817°	+ ½%	1120°	795°	762°	+ 4 %
1093°	755°	736°	+ 2½%	1047°	720°	694°	+ 3½%
997°	670°	646°	+ 3½%	969°	625°	620°	+ 1 %
1141°	815°	781°	+ 4 %	1133°	805°	774°	+ 4 %
1061°	720°	706°	+ 2 %	1053°	710°	699°	+ 1½%
976°	640°	626°	+ 2 %	967°	620°	618°	+ ½%

Tabelle XI

Vierelektrodenröhren

T_1(s)	T_2(gem)	T_2(ber)	Abw.	T_1(s)	T_2(gem)	T_2(ber)	Abw.
1173°	775°	771°	+ ½%	1184°	785°	780°	+ ½%
1108°	710°	717°	- 1 %	1110°	725°	719°	+ 1 %
1048°	660°	667°	- 1 %	1032°	655°	654°	0 %
982°	605°	612°	- 1 %	979°	610°	610°	0 %
1153°	780°	754°	+ 3½%	1152°	765°	754°	+ 1½%
1076°	710°	691°	+ 2½%	1084°	700°	696°	+ ½%
972°	625°	604°	+ 3½%	998°	635°	626°	+ 1½%

Der Vergleich der gemessenen mit den berechneten Temperaturwerten zeigt, dass die im Höchstfalle auftretende Abweichung 4 % beträgt. Diese Abweichung ist nicht grösser als der Unterschied, welcher bei dem in § 30 behandelten wärmeleitenden idealisierten Gitter zwischen den gemessenen und berechneten Temperaturen erhalten wurde. Dieser Unterschied war, wie damals bewiesen wurde, zum allergrössten Teil, nämlich zu 3 %, auf die ungenaue Kenntnis der Strahlungsgesetze und der Werte für das Reflexionsvermögen zurückzuführen. Die Abweichung, die sich ergibt, wenn die für das idealisierte Gitter durchgeführten Rechnungen auf das reale Gitter übertragen werden, ist also nach den Ergebnissen der Versuche sehr gering. Daraus folgt, dass die in § 21 eingeführte Annahme, nach welcher die gesamte dem realen Gitter zugestrahlte Energie ebenso gross sein soll wie die dem entsprechenden idealisierten Gitter zugestrahlte, bei normalen Empfängerröhren mit grosser Annäherung zutrifft. Es können also die für das idealisierte Gitter durchgeführten Rechnungen bedenkenlos auf das reale Gitter übertragen werden. Damit ist festgestellt , dass auch die letzte der zur Durchführung der Rechnung notwendigen Voraussetzungen, deren Berechtigung experimentell nachgeprüft werden musste, zulässig ist.

Zusammenfassend ergibt sich aus den Versuchen, dass der zwischen den berechneten und den gemessenen Gittertemperaturen auftretende Unterschied zum allergrössten Teil durch die ungenaue Kenntnis der Strahlungsgesetze und der Werte für das Reflexionsvermögen bedingt ist. Gegenüber dem dadurch sich ergebenden Fehler sind die Fehler, welche durch die Einführung der zur Anwendung des Verfahrens erforderlichen Voraussetzungen hervorgerufen werden, verhältnismässig klein. Im Mittel bedingt bei den untersuchten Röhrentypen die Summe aller Einzelfehler keinen grösseren Unterschied zwischen den wirklich vorhandenen und den berechneten Temperaturen als etwa % %. Diese Genauigkeit erscheint als für die Praxis ausreichend, zumal, wenn man bedenkt, dass bei den einzelnen Exemplaren einer bestimmten Röhrentype gewisse Schwankungen sowohl in den Abmessungen, wie auch in den Strahlungseigenschaften der Elektroden auftre-

ten, die notwendigerweise auch Schwankungen der Gittertemperatur zur Folge haben.

Es muss noch darauf hingewiesen werden, dass möglicherweise bei Röhren, deren Abmessungen wesentlich andere sind als die hier untersuchten, grössere Abweichungen zwischen den berechneten und den wirklich vorhandenen Temperaturwerten auftreten können. Jedoch wird auch in einem solchen Fall das abgeleitete Verfahren Aufschluss über die Abhängigkeit der Gittertemperatur von den einzelnen möglichen Veränderlichen geben, da bei einer derartigen Untersuchung die Abweichungen sich grösstenteils herausheben.

Damit wäre die Frage nach der Anwendbarkeit des neuen Verfahrens auf die Elektronenröhre in ausreichendem Masse geklärt. Mit Hilfe des abgeleiteten Verfahrens kann also unter den gemachten Einschränkungen die Temperatur der Elektroden und insbesondere die des Steuergitters für jede Röhre mit beliebigem zylindrischem Aufbau berechnet werden. Die dabei erzielte Genauigkeit hängt in erster Linie davon ab, wie genau die Strahlungsgesetze und die Werte des Reflexionsvermögens für die Elektroden bekannt sind.

Anhang

Beispiel für die Berechnung einer Gittertemperatur

esucht: Die Temperatur des Steuergitters einer Vierelektrodenröhre.

ie Elektrodenabmessungen:

	Radius	Wickeldraht-durchmesser	Steigung	Streben-durchmesser	Zahl der Streben
athode:	r_1=0,75 mm	—	—	—	—
teuergitter:	r_2=1,825 "	δ_2 = 0,15 mm	φ_2=0,70mm	δ_2'=0,6mm	m_2 = 1
chirmgitter:	r_3=4,04 "	δ_3 = 0,08 "	φ_3=0,40"	δ_3'=0,6"	m_3 = 2
node:	r_4=7,50 "	—	—	—	—

Länge sämtlicher Elektroden: $\mathcal{l}$ = 31 mm

ie Werte für das Reflexionsvermögen der Elektroden

athode (mit Uranoxyd überzogen): $\rho_1 = 0{,}2$

ämtliche übrigen Elektroden (Nickel): $\rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = 0{,}85$

(vergl. S.84 und 87).

. Ermittlung der dem Steuergitter zugeführten Energie H_2 in Abhängigkeit von der Kathodentemperatur T_1

a) Berechnung der Koeffizienten e_{ik} und e^*_{ik}

α) Berechnung der Koeffizienten e^{∞}_{ik} und $e^{*\infty}_{ik}$ für unendlichlange Elektroden.

Hierzu sind die aus (32) sich ergebenden Werte

$v_1 = 1 \qquad v_2 = 0{,}255 \qquad v_3 = 0{,}238 \qquad v_4 = 1$

zu benutzen.

Die e^{∞}_{ik} ergeben sich aus den Gleichungen (34) und (36).

ohenbeispiel:

Nach (34) wird:

$e^{\infty}_1 = v_2 \qquad = 0{,}255$

$e_{31}^{\infty} = v_3 \cdot (1 - v_2) = 0{,}238 \cdot 0{,}745 = 0{,}177$

$e_{41}^{\infty} = v_4 \cdot (1 - v_2)(1 - v_3) = 1 \cdot 0{,}745 \cdot 0{,}762 = 0{,}568$

Entsprechend wird:

--	$e_{21}^{\infty} = 0{,}255$	$e_{31}^{\infty} = 0{,}177$	$e_{41}^{\infty} = 0{,}568$
$e_{12}^{\infty} = 0{,}411$	--	$e_{32}^{\infty} = 0{,}238$	$e_{42}^{\infty} = 0{,}762$
$e_{13}^{\infty} = 0{,}138$	$e_{23}^{\infty} = 0{,}115$	--	$e_{43}^{\infty} = 1{,}000$
$e_{14}^{\infty} = 0{,}057$	$e_{24}^{\infty} = 0{,}047$	$e_{34}^{\infty} = 0{,}128$	--

Die $e_{ik}^{*\infty}$ ergeben sich aus den Rekursionsformeln (42) und (43)

Es wird:

--	$e_{22}^{*\infty} = 0{,}150$	$e_{32}^{*\infty} = 0{,}104$	$e_{42}^{*\infty} = 0{,}332$
--	$e_{23}^{*\infty} = 0{,}050$	$e_{33}^{*\infty} = 0{,}166$	$e_{43}^{*\infty} = 0{,}530$
--	$e_{24}^{*\infty} = 0{,}021$	$e_{34}^{*\infty} = 0{,}068$	$e_{44}^{*\infty} = 0{,}679$

Beispiel für die Durchführung der Rechnung:

Es wird nach Gleichung (42) der Koeffizient

$$e_{43}^{*\infty} = v_4 \cdot (1 - v_3) \cdot \left[1 - (e_{13}^{\infty} + e_{23}^{\infty} + e_{23}^{*\infty})\right]$$
$$= 1 \cdot 0{,}762 \cdot 0{,}696 = 0{,}530$$

β) Berechnung der Endlichkeitsfaktoren $\varkappa_{ik}$ und $\varkappa_{ik}^{*}$

Die $\varkappa_{ik}$ bzw. $\varkappa_{ik}^{*}$ für $k \leq i$ werden durch graphische Auswertung der Integrale (50), (51) und (52) erhalten.
Die $\varkappa_{ik}$ bzw. $\varkappa_{ik}^{*}$ für $k \geq i + 1$ ergeben sich aus diesem Grund der Symmetriebeziehung. Danach ist (vergl. § 20)

$$\varkappa_{ki} = \varkappa_{ik}$$

Dementsprechend erhält man:

$\varkappa_{12} = \varkappa_{21} = 0{,}974$

$\varkappa_{13} = \varkappa_{31} = 0{,}926$ $\quad \varkappa_{23} = \varkappa_{32} = 0{,}950$

$\varkappa_{14} = \varkappa_{41} = 0{,}861$ $\quad \varkappa_{24} = \varkappa_{42} = 0{,}874$ $\quad \varkappa_{34} = \varkappa_{43} = 0{,}$

$\gamma_{22}^* = 0,937$

$\gamma_{23}^* = \gamma_{32}^* = 0,888$ $\quad \gamma_{33}^* = 0,867$

$\gamma_{24}^* = \gamma_{42}^* = 0,816$ $\quad \gamma_{34}^* = \gamma_{43}^* = 0,796$ $\quad \gamma_{44}^* = 0,764$

γ) Berechnung der e_{ik} und e_{ik}^* nach der Formel

$$e_{ik} = e_{ik}^{\infty} \cdot \gamma_{ik}$$

Ergebnis:

$e_{21} = 0,248$ $\quad e_{31} = 0,164$ $\quad e_{41} = 0,489$

$e_{12} = 0,400$ $\quad e_{32} = 0,226$ $\quad e_{42} = 0,665$

$e_{13} = 0,128$ $\quad e_{23} = 0,109$ $\quad e_{43} = 0,920$

$e_{14} = 0,049$ $\quad e_{24} = 0,041$ $\quad e_{34} = 0,118$

$e_{22}^* = 0,141$ $\quad e_{32}^* = 0,092$ $\quad e_{42}^* = 0,271$

$e_{23}^* = 0,045$ $\quad e_{33}^* = 0,144$ $\quad e_{43}^* = 0,422$

$e_{24}^* = 0,017$ $\quad e_{34}^* = 0,054$ $\quad e_{44}^* = 0,518$

b) Aufstellung und Berechnung der Determinante

α) Aufstellung der Determinante entsprechend (94) unter Benutzung der Werte für die Koeffizienten e_{ik} und e_{ik}^* und für das Reflexionsvermögen der Elektroden.

	E_3	E_2	E_1	$E_3^{(ra)}$	$E_2^{(ra)}$	$E_1^{(ra)}$	$E_2^{(ri)}$	$E_3^{(ri)}$	$E_4^{(ri)}$	abs. Glied
,51	0	0	0	0	0	0	0	0	1,178	0
0	-15,68	0	0	1,178	0	0	0	1,178	0	-6,67 V_3
0	0	-15,68	0	0	1,178	0	1,178	0	0	-6,67 V_2
0	0	0	-6,25	0	0	5,00	0	0	0	-1,25 V_1
0	1,178	0	0	-1,178	0	0	0	0	0,118	0
0	0	1,178	0	0	-1,178	0	0	0,109	0,041	0
0	0	0	5,00	0	0	-5,00	0,400	0,128	0,049	0
0	0	1,178	0	0	0	0,248	-1,037	0,045	0,017	0
0	1,178	0	0	0	0,226	0,164	0,092	-1,034	0,054	0
178	0	0	0	0,920	0,665	0,489	0,271	0,422	-0,660	0

Hierin wurde: $W_4 == Q_4 = 0$ und daher auch $V_4 = 0$ gesetzt.

β) Berechnung der Determinante

In der Determinante werden zunächst die ersten drei Spalten nach hinten gestellt, damit auch die Unterdeterminanten u_{iv} aus ihr berechnet werden können. Die so erhaltene Determinante wird dann mit Hilfe des in § 25 (S. 78) beschriebenen Verfahrens bis auf 3 Zeilen und Spalten reduziert. Dadurch wird die folgende Determinante gewonnen:

E_3	E_2	E_1	absolutes Glied
0	- 19,09	+ 2,218	$1{,}970\ V_1 - 9{,}32\ V_2$
- 18,54	- 29,6	+ 8,06	$7{,}90\ V_1 - 13{,}71\ V_2 - 9{,}07\ V_3$
+ 28,74	+100,6	-23.93	$-24{,}42\ V_1 + 46{,}0\ V_2 + 12{,}84\ V_3$

Durch weitere Reduktion der links stehenden Determinante erhält man die Zählerdeterminante:

$$N = 1796.$$

Ferner erhält man entsprechend den Überlegungen in § 25(S. 79) die durch das Absorptionsvermögen a_v dividierte Unterdeterminante u_{iv} dadurch, dass man die auf der rechten Seite zur Hilfsenergie V_v gehörigen Faktoren in die zu E_i gehörige Spalte der Determinante einsetzt und die so entstehende Determinante berechnet. Auf diese Weise wird:

$$\frac{u_{11}}{a_1} = 2315 \qquad \frac{u_{21}}{a_1} = 85{,}0 \qquad \frac{u_{31}}{a_1} = 110{,}7$$

$$\frac{u_{12}}{a_2} = 724 \qquad \frac{u_{22}}{a_2} = 962 \qquad \frac{u_{32}}{a_2} = 97{,}8$$

$$\frac{u_{13}}{a_3} = 422 \qquad \frac{u_{23}}{a_3} = 49{,}0 \qquad \frac{u_{33}}{a_3} = 987$$

c) Berechnung der zugeführten Energie

Aus den Determinanten erhält man nach Gleichung (69) die in de Gleichung (70) für die zugeführte Energie vorkommenden Faktoren h_{kv}, und zwar wird:

$h_{22} = 1{,}042$ $\qquad$ $h_{32} = 0{,}070$

$h_{23} = 0{,}037$ $\qquad$ $h_{33} = 1{,}076$

Weiterhin gewinnt man durch Einsetzen dieser Werte in die Gleichung (70) für die dem Steuergitter bzw. dem zweiten Gitter zugeführten Energien H_2 bzw. H_3 die folgenden Beziehungen:

$$H_2 = 0{,}0735 \cdot E_1 - 0{,}042 \cdot Q_2 - 0{,}037 \cdot Q_3$$

$$H_3 = 0{,}0955 \cdot E_1 - 0{,}070 \cdot Q_2 - 0{,}076 \cdot Q_3$$

Dabei wurden die den Gittern von aussen zugeführten Energien $W_2 = W_3 = 0$ gesetzt.

Für die Berechnung der Steuergittertemperatur wird zunächst nur die erste dieser beiden Gleichungen gebraucht, die zweite Gleichung wird erst dann benötigt, wenn der Einfluss des Wärmeleitungsgliedes Q_3 durch das in § 24 beschriebene Näherungsverfahren berücksichtigt werden soll. Unter Vernachlässigung dieses Gliedes und auch des Gliedes Q_2 erhält man vorerst für die erste Näherung der zugeführten Energie entsprechend Gleichung (71) die Beziehung:

$$H_2^{(1)} = 0{,}0735\, E_1$$

In diese Beziehung muss zum Schluss des ersten Schrittes der Rechnung noch statt der Kathodenausstrahlung E_1 die Kathodentemperatur T_1 eingeführt werden. Nach dem Stefan-Boltzmannschen Gesetz (103) wird unter Benutzung der Oberfläche $O_1 = 1{,}46\ cm^2$ der Kathode

$$E_1 = 8{,}32 \cdot \left(\frac{T_1^{(S)}}{1000} \right)^4$$

also wird schliesslich:

$$H_2^{(1)} = 0{,}612 \cdot \left(\frac{T_1^{(S)}}{1000} \right)^4$$

Damit ist entsprechend Gleichung (92) eine Beziehung zwischen der dem Gitter zugeführten Energie H_2 und der schwarzen Kathodentemperatur $T_1^{(S)}$ gewonnen.

II. Berechnung der Temperatur des Steuergitters durch Integration der Wärmeleitungsgleichung (60)

Die Wärme wird vom Gitter über die Zuführungen abgeleitet. Diese sind auf beiden Seiten vollkommen gleich beschaffen, so dass auch genau die gleichen Wärmemengen von beiden Gitterenden abgeleitet werden. Die Maximaltemperatur liegt also in der Mitte des Gitters, und bei der Integration der Wärmeleitungsgleichung ist daher (vergl. § 23) nur die eine Hälfte des Gitters zu betrachten. Dementsprechend ist im folgenden stets $\ell = 15{,}5$ mm zu setzen.

a) Abmessungen und Stoffkonstanten,

deren Kenntnis neben den oben angegebenen Abmessungen für die Integration der Wärmeleitungsgleichung erforderlich ist.

α) Abmessungen und Wärmeleitfähigkeit der Zuführung:

Ni 0,6 mm Ø, 4 mm lang; $\lambda = 0{,}59$ $\frac{\text{Watt}}{\text{Grad cm}}$

\+ Ni 1,0 " Ø,12 " " ; $\lambda =$ " "

\+ Pt 0,5 " Ø, 8 " " ; $\lambda = 0{,}71$ "

β) Wärmeleitfähigkeit der Gitterstrebe (Nickel):

$$\lambda = 0{,}59 \ \frac{\text{Watt}}{\text{Grad cm}}$$

γ) Ausstrahlungsgesetz des Gitters:

Nach Gleichung (101) ist das für Nickel gültige Ausstrahlungsgesetz:

$$E_i^{(Ni)} = O_i \cdot 8{,}15 \cdot 10^{-16} \cdot T_i^{5{,}07}$$

also wird in Gleichung (58)

$$\eta_2 = 8{,}15 \cdot 10^{-16} \qquad \varphi_2 = 5{,}07$$

δ) Die Oberfläche des realen Gitters

ergibt sich aus Gleichung (57) zu

$$O_2^{(r)} = 1{,}42 \text{ cm}^2$$

ε) Die Aussentemperatur Ta

wird entsprechend der im Röhrenfuss mit einem Thermometer gemessenen Temperatur

$$T_a = 330^\circ$$

gesetzt.

b) Wert der dem Gitter zugeführten Energie H_2,

für den die Integration der Wärmeleitungsgleichung durchgeführt werden soll.

Im allgemeinen wird die Integration für mehrere (3 - 4) Werte der zugeführten Energie (entsprechend mehreren Werten der Kathodentemperatur) durchgeführt. Für dieses Rechenbeispiel werde der Wert $H_2 = 0{,}500$ (entsprechend einer Kathodentemperatur von 951°) zugrundegelegt. Dieser Wert ist allerdings, bevor er in den folgenden Rechnungen benutzt wird, noch durch 2 zu dividieren, da ja, wie erwähnt, nur die eine Hälfte des Gitters betrachtet wird. Demgemäss ist also im folgenden

$$H = 0{,}250 \text{ Watt}$$

zu setzen.

c) Aufstellung der durch Gleichung (74) definierten Wärmeableitungsfunktion $G\,(T^{(l)}, T_a)$.

Da die Wärme nur über die Zuführung vom Gitter abgeleitet wird, so wird die Funktion G aus Gleichung (99a) erhalten (vergl. § 25, Seite 81). Der hierin vorkommende Faktor g ergibt sich aus den Abmessungen und der Wärmeleitfähigkeit der Zuführung.

Hierzu wird für jeden der drei Zuführungsteile die Formel für die stationäre lineare Wärmeleitung „durchfl. Wärmemenge

$$Q = \frac{\lambda \text{ x Querschnitt}}{\text{Länge}} \text{ x Temperaturdifferenz}$$

" aufgestellt. Aus den so gewonnenen 3 Gleichungen werden die beiden unbekannten Temperaturen an den Verbindungsstellen der Zuführungsteile eliminiert. Dadurch wird die durchfliessende Wärmemenge in der Form $g\,(T^{(l)} - T_a)$ erhalten, und zwar wird:

$$g = 0{,}93 \cdot 10^{-3}$$

damit wird:

$$G\,(T^{(l)}, T_a) = 0{,}93 \cdot 10^{-3}\,(T^{(l)} - T_a)$$

d) Ermittlung der zueinander gehörigen Werte der Maximaltemperatur $T^{(max)}$ und der Endtemperatur $T^{(l)}$ aus Gleichung (80)

Gleichung (80) lässt sich abgekürzt in der folgenden Form schreiben:

$$T^{(max)} - c_1\,T^{(max)\,6{,}07} = T^{(l)} - c_1\,T^{(l)\,6{,}07} + c_2\,(T^{(l)} - T_a)^2$$

Mit

$$c_1 = \frac{\eta \cdot \sigma^{(m)}}{(\xi+1)\cdot H} \quad ; \quad c_2 = \frac{l \cdot g^2}{2\lambda \cdot \pi \cdot \left(\frac{\delta'}{2}\right)^2 \cdot H}$$

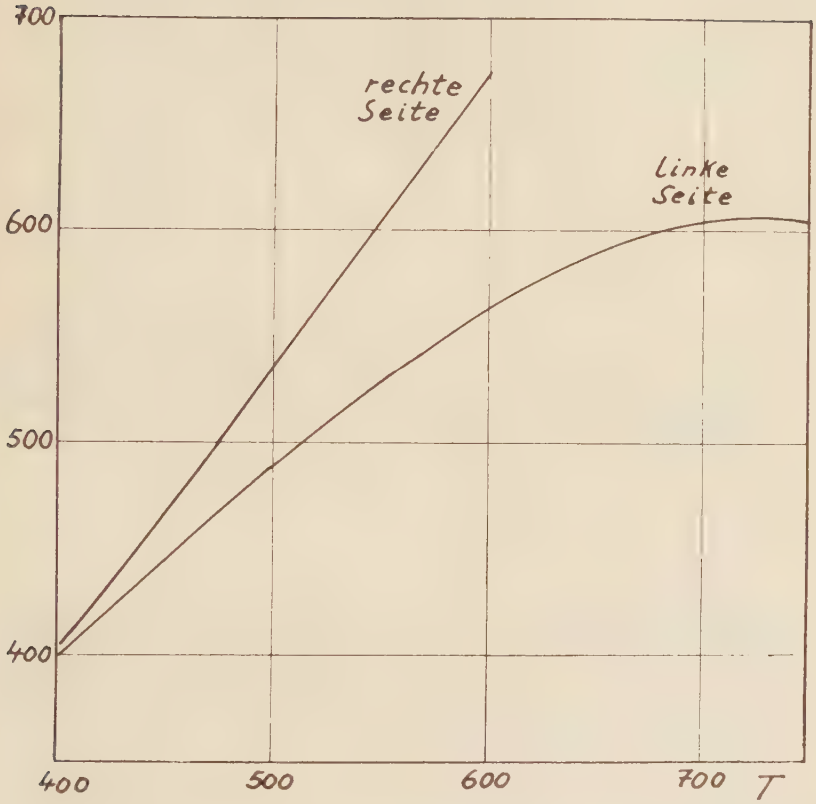
Nach Einsetzen der Zahlenwerte erhält man hierfür

$$c_1 = 7{,}70 \cdot 10^{-16} \qquad c_2 = 16{,}04 \cdot 10^{-4}$$

Es sind nun zunächst (vergl. Seite) die beiden Seiten der obigen Gleichung für eine Reihe von Temperaturwerten zu berechnen. Die hierzu erforderlichen Rechnungen sind aus der folgenden Aufstellung zu ersehen:

T	$T^{6,01}$	$c_1 \cdot T^{6,01}$	$T - c_1 \cdot T^{6,01}$	$(T-T_a)^2$	$c_2 \cdot (T-T_a)^2$	$T - c_1 \cdot T^{6,01} + c_2 (T-T_a)^2$
400	$0{,}44 \cdot 10^{16}$	3	397	$0{,}49 \cdot 10^4$	8	405
450	0,88	7	443	1,44	23	466
500	1,66	13	487	2,89	48	535
550	2,95	23	527	4,84	78	605
600	4,96	38	562	7,29	117	679
650	8,06	62	588	10,22	162	750
700	12,52	96	604	13,66	219	823
750	18,96	146	604	17,60	282	886

In dieser Aufstellung stellt die vierte Spalte die linke Seite der Gleichung (80) und die letzte Spalte die rechte Seite dieser Gleichung dar. Die beiden betreffenden Spalten sind nun in Abhängigkeit von der Temperatur graphisch aufzutragen. Das ist in der folgenden Zeichnung geschehen:



Aus dieser Zeichnung erhält man die zueinander gehörigen Werte von $T^{(max)}$ und $T^{(l)}$, indem diejenigen Temperaturwerte bestimmt, die zu gleichen Ordinaten der beiden gezeichneten Kurven gehören.

Es wird so:

für $T^{(\ell)}$ =	$T^{(max)}$ =
400°	409°
430°	447°
460°	491°
480°	525°
500°	562°
520°	601°
540°	657°
550°	710°

e) Aufstellung der Gleichung für die Hilfstemperatur $T^{(\ell)*}$

Diese Gleichung wird, da die Wärmeableitung vom Gitter nur über die Zuführung erfolgt, aus (100a) erhalten. Abgekürzt kann man schreiben:

$$T^{(\ell)*} = C_1 - C_2 \cdot J(T^{(max)})$$

mit

$$C_1 = T_a + \frac{H}{g} \quad ; \quad C_2 = \frac{\eta \cdot v^{(r)}}{g}$$

$J(T^{(max)})$ ist das in (100a) vorkommende Integral (multipliziert mit dem Faktor $\frac{1}{2}$). Für dieses kann der Näherungswert (90) benutzt werden. Danach wird

$$J(T^{(max)}) = T^{(max)\,5,01} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{2\nu+1} \cdot \binom{5,01}{\nu} \cdot \left[\frac{T^{(max)} - T^{(\ell)}}{T^{(max)}}\right]^\nu$$

Wird die hierin vorkommende unendliche Reihe abgekürzt mit $R(T^{(max)})$ bezeichnet, so wird also:

$$T^{(\ell)*} = C_1 - C_2 \cdot T^{(max)\,5,01} \cdot R(T^{(max)})$$

Für C_1 und C_2 erhält man nach Einsetzen der Zahlenwerte:

$$C_1 = 599; \quad C_2 = 1,24 \cdot 10^{-12}$$

Die Hilfstemperatur $T^{(\ell)*}$ ist nun für eine Reihe von Werten der Maximaltemperatur $T^{(max)}$) zu ermitteln. Dabei braucht die Reihe $R(T^{(max)})$ nur bis zum Gliede $\nu = 3$ berechnet zu wer

den, da bereits dieses Glied nur noch die dritte Stelle nach dem Komma beeinflusst. Die in $R\,(T^{(max)})$ vorkommende Endtemperatur $T^{(\ell)}$ erhält man für jedes $T^{(max)}$ aus der Aufstellung auf Seite 130. Der Gang der Rechnung ist im einzelnen aus der folgenden Aufstellung zu ersehen.

$T^{(max)}$	$R\,(T^{(max)})$	$T^{(max)\,5,01}$	$C_2T^{(max)\,5,01} \cdot R(T^{(max)})$	$T^{(\ell)}$
409	0,964	$12,1.10^{12}$	14,5	585
447	0,939	19,1	22,2	577
491	0,903	30,2	33,8	565
525	0,870	42,4	45,7	553
562	0,838	60,0	62,3	537
601	0,806	83,8	83,8	515
657	0,757	131,	123,	476
710	0,707	192,	168,	431

f) Graphische Ermittlung der Maximal- und der Endtemperatur des Gitters.

Es sind die soeben erhaltenen Werte für die Endtemperatur $T^{(\ell)}$ und die Hilfstemperatur $T^{(\ell)*}$ als Funktion der Maximaltemperatur $T^{(max)}$ aufzutragen. Das ist in der folgenden Zeichnung geschehen.

Hieraus ergeben sich die gesuchten Werte der Maximal- und Endtemperatur, die zu der physikalisch allein möglichen Temperaturverteilung gehören, als die Koordinaten des Schnittpunktes der beiden gezeichneten Kurven (vergl.S.65), Es wird:

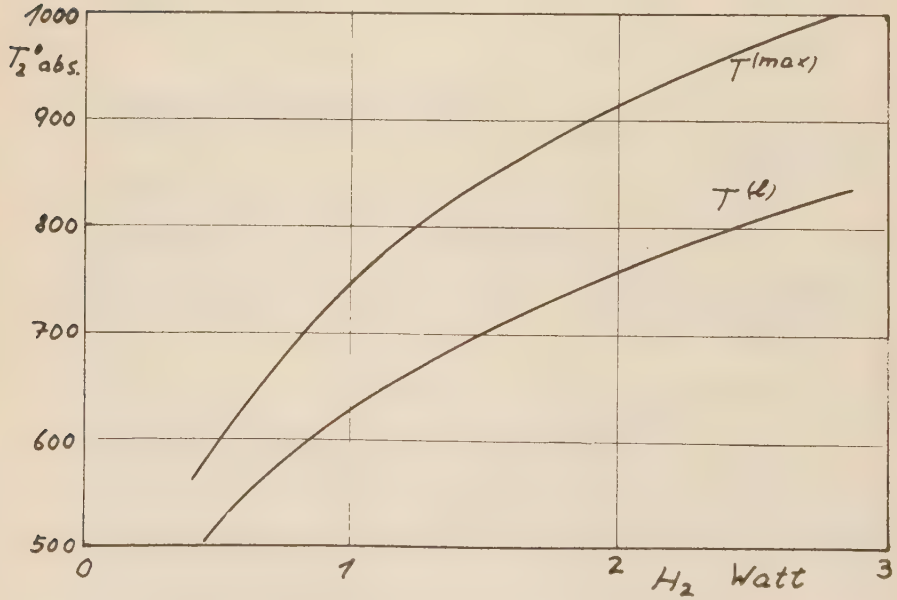
$$T_2^{(max)} = 596^\circ; \qquad T_2^{(l)} = 517^\circ$$

g) Ermittlung der Temperatur des Steuergitters in Abhängigkeit von der zugeführten Energie H_2.

Die beiden gefundenen Temperaturwerte gelten für

$$H_2 = 0{,}500.$$

Genau entsprechend wird die Gittertemperatur für andere Werte von H_2 bestimmt. Man erhält so die Maximal- und Endtemperatur des Steuergitters als Funktionen der zugeführten Energie. Diese beiden Funktionen sind in der folgenden Zeichnung graphisch dargestellt.



Die beiden bezeichneten Kurven entsprechen den Gleichungen (93).Benutzt man neben diesen beiden Kurven, die unter I gefundene Beziehung zwischen H_2 und T_1, so kann die Gittertemperatur für jeden Wert der Kathodentemperatur T_1 angegeben werden.

Die so erhaltenen Temperaturwerte gelten allerdings nur in erster Näherung, da die Wärmeleitungsglieder Q_v bei der Ermittlung von H_2 vernachlässigt wurden.

III. Berechnung der genauen Werte der Gittertemperatur mittels des Näherungsverfahrens

Es ist jetzt die in I aufgestellte genaue Gleichung für die zugeführte Energie zu benutzen. Diese lautete:

$$H_2 = H_2^{(1)} - 0{,}042 \cdot Q_2 - 0{,}037 \cdot Q_3$$

Die hierin vorkommenden Wärmeleitungsglieder sind nacheinander zu berücksichtigen.

a) Berücksichtigung des Gliedes Q_2

Die abgeleitete Wärmemenge Q_2 ergibt sich in erster Näherung aus der vorher in der gleichen Näherung berechneten Gitterendtemperatur zu:

$$Q_2^{(1)} = 2 g_2 \left(T_2^{(\ell)(1)} - T_a \right)$$

(der Faktor 2 wegen der beiden Zuführungen.)

Setzt man diesen Wert in die Gleichung für H_2 ein, so erhält man nach Einsetzen von Zahlenwerten ($H_2^{(1)} = 0{,}500$) die zweite Näherung der zugeführten Energie zu:

$$H_2^{(2)} = 0{,}485 \text{ Watt}$$

Mit Hilfe dieses Wertes kann aus den Kurven auf S.132 die Gittertemperatur in zweiter Näherung bestimmt werden. Es wird:

$$T_2^{(max)(2)} = 591^\circ \qquad T_2^{(\ell)(2)} = 513^\circ$$

b) Berücksichtigung des Gliedes Q_3

Hierzu muss zunächst die Temperatur des Schirmgitters (k = 3) ebenso wie die des Steuergitters ermittelt werden. Diese wird in zweiter Näherung, wenn die gleiche Kathodentemperatur wie unter II zu Grunde gelegt wird!

$$T_3^{(max)(2)} = 638^\circ \qquad T_3^{(\ell)(2)} = 502^\circ$$

Also wird Q_3 in zweiter Näherung:

$$Q_3^{(2)} = 2 g_3 \left(T_3^{(\ell)(2)} - T_a \right)$$

(g_3 ergibt sich aus den Abmessungen und der Wärmeleitfähigkeit der Schirmgitterzuführung).

Nach Einsetzen von Zahlenwerten erhält man aus der obigen Gleichung für H_2 (S. 133) die dritte Näherung von H_2 zu:

$$H_2^{(3)} = 0{,}472 \text{ Watt}$$

Aus den Kurven auf S. 132 ergibt sich schliesslich die dritte Näherung der Gittertemperatur zu:

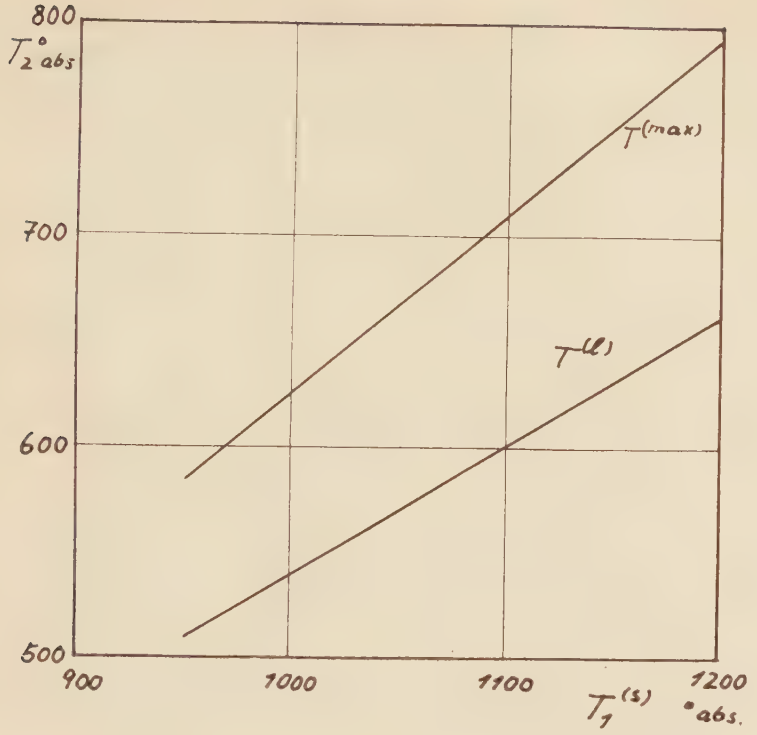
$$T_2^{(max)(3)} = 586^0; \qquad T_2^{(\mathcal{L})(3)} = 510^0$$

Weitere Näherungen ergeben innerhalb der angegebenen Stellenzahl keine Verbesserung der Temperaturwerte mehr.

Die so erhaltenen genauen Werte der Gittertemperatur unterscheiden sich nur verhältnismässig wenig von den unter I erhaltenen ersten Näherungswerten:

$$T_2^{(max)(1)} = 596^0 \qquad T_2^{(\mathcal{L})(1)} = 517^0$$

Das gleiche Näherungsverfahren kann auch für die anderen Werte von $H_2^{(1)}$ durchgeführt werden. Man erhält so auch die dritte Näherung der Gittertemperatur in Abhängigkeit von der zugeführten Energie. Wird schliesslich noch der in I gefundene Zusammenhang zwischen $H_2^{(1)}$ und T_1 berücksichtigt, so wird also die Gittertemperatur in Abhängigkeit von der Kathodentemperatur T_1 gewonnen. Die so für die Maximal- und Endtemperatur des Gitters erhaltenen Beziehungen sind in der folgenden Zeichnung graphisch dargestellt.



Zusammenstellung der bei der Rechnung benutzten Formeln

$$v_i = \frac{O_i}{O_i^{(2)}} = \frac{\delta_i}{\zeta_i} + m_i \cdot \frac{\delta_i'}{2\pi\tau_i} \cdot \left(1 - \frac{\delta_i}{\zeta_i}\right) \qquad (32)$$

$$i = 2 \ldots\ldots (n-1)$$

$$e_{ik}^{\infty} = v_i \cdot \prod_{\mu=k+1}^{i-1} (1 - v_\mu) \qquad (34)$$

$$k \leq i-1$$

$$e_{ik}^{\infty} = v_i \cdot \frac{\tau_i}{\tau_k} \cdot \prod_{\mu=i+1}^{k-1} (1 - v_\mu) \qquad (36)$$

$$k \geq i+1$$

$$e_{ik}^{*\infty} = v_i \cdot \prod_{\mu=k}^{i-1} (1 - v_\mu) \left[1 - \sum_{\nu=1}^{k-1} e_{\nu k}^{\infty} - \sum_{\nu=2}^{k-1} e_{\nu k}^{*\infty} \right] \qquad (42)$$

$$k \leq i$$

$$e_{ik}^{*\infty} = v_i \cdot \frac{\tau_i}{\tau_k} \cdot \prod_{\mu=2}^{k-1} (1-\nu_\mu) \left[1 - \sum_{\nu=1}^{i-1} e_{\nu i}^{\infty} - \sum_{\nu=2}^{i-1} e_{\nu i}^{*\infty} \right] \qquad (43)$$

$$k \geq i-1$$

$$\gamma_{ik} = 1 - \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \cdot \operatorname{arc\,tg} \frac{\tau_k}{\ell} \left[\sqrt{\left(\frac{\tau_i}{\tau_k}\right)^2 - \sin^2\varphi} - \cos\varphi \right] d\varphi \qquad (50)$$

$$k \leq i-1$$

$$\gamma_{ik}^{*} = 1 - \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \cdot \operatorname{arc\,tg} \frac{\tau_k}{\ell} \left[\sqrt{\left(\frac{\tau_i}{\tau_k}\right)^2 - \sin^2\varphi} + \cos\varphi \right] d\varphi \qquad (51)$$

$$k \leq i-1$$

$$\gamma_{kk}^{*} = 1 - \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \cdot \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{2\tau_k}{\ell} \cdot \cos\varphi \right) d\varphi \qquad (52)$$

$$Q_k^{(\tau)} = 2\pi\ell \left[\pi \tau_k \cdot \frac{\delta_k}{\varrho_k} + w_k \cdot \frac{\delta_k'}{2} \left(1 - \frac{\delta_k}{\varrho_k} \right) \right] \qquad (57)$$

$$\nu_k(T_k) = \nu_k \cdot T_k^{\xi_k} \qquad (58)$$

$$h_{kv} = 2 \cdot \frac{\breve{u}_{11}\breve{u}_{kv} - \breve{u}_{1v}\breve{u}_{k1}}{a_v \cdot N \breve{u}_{11}} \qquad (69)$$

$$H_k = 2E_k + Q_k = 2\frac{\breve{u}_{k1}}{\breve{u}_{11}} \cdot E_1 + \sum_{v=2}^{w} h_{kv} W_v - \sum_{v=2}^{k-1} h_{kv} Q_v - \sum_{v=k+1}^{w} h_{kv} Q_v - (h_{kk} - 1) Q_k \qquad (70)$$

$$H_k^{(1)}(E_1) = 2E_k^{(1)} + Q_k^{(1)} = 2\frac{\breve{u}_{k1}}{\breve{u}_{11}} \cdot E_1 + \sum_{v=2}^{w} h_{kv} W_v \qquad (71)$$

$$Q = \mathcal{G}(T^{(\ell)}, T_a) \qquad (74)$$

$$T^{(max)}(t) - \frac{\eta \cdot O^{(r)}}{(\xi+1)\cdot H} \cdot \left| T^{(max)}(t) \right|^{\xi+1}$$

$$= T^{(l)}(t) - \frac{\eta \cdot O^{(r)}}{(\xi+1)\,H} \cdot T^{(l)}(t)^{\xi+1} + \frac{l}{2l \cdot H} \cdot \varphi^2 \left[T^{(l)}(t),\ T_a \right] \qquad (80)$$

$$\int_{x_1(t)}^{l} T^{\xi}(x,t)\,dx = l \cdot T^{(max)}(t)^{\xi} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{-1^{\nu}}{2\nu+1} \cdot \binom{\xi}{\nu} \cdot \left[\frac{T^{(max)}(t) - T^{(l)}(t)}{T^{(max)}(t)} \right]^{\nu} \qquad (90)$$

$$H_k^{(1)} = H_k^{(1)}\left(T_1\right) \qquad (92)$$

$$T_k^{(max)} = \mathcal{F}_1\left(H_k\right) \quad ; \quad T_k^{(l)} = \mathcal{F}_2\left(H_k\right) \qquad (93)$$

$$Q = \varphi\left(T^{l}, T_a\right) = g \cdot \left(T^{(l)} - T_a\right) \qquad (99a)$$

$$T^{(l)}(t) = \Omega\left[T^{(max)}(t)\right] \cdot T_a + \frac{1}{g} \cdot H - \frac{\eta O^{(r)}}{l \cdot g} \cdot \int_{T^{(max)}(t)}^{T^{(l)}(t)} \frac{T^{\xi}\,dT}{\frac{dT(x,t)}{dx}} \qquad (100a)$$

$$E_i^{(Ni)} = O_i \cdot 8{,}15 \cdot 10^{-16} \cdot T_i^{5{,}01} \quad \text{Watt} \qquad (101)$$

$$E_1 = \sigma \cdot O_1 \cdot T_1^{(S)\,4} \qquad (103)$$

Zusammenstellung der Bezeichnungen

		eingeführt auf Seite:
a_i	Absorptionsvermögen	1
b	Produkt aus Wärmeleitfähigkeit und Querschnitt der Gitterstreben	50
c, c_1, c_2	Konstanten	
$d\sigma, d\tau$	Flächenelemente	8, 12
e_{ik}	Koeffizienten für direkte Strahlung (1. und 2. Klasse)	6, 27
e_{ik}^*	Koeffizienten für direkte Strahlung (3. Klasse)	27
e_{ik}^∞	Koeffizienten für unendlich lange Elektroden	29
$\overline{e_{ik}}$	Koeffizienten für das reale Gitter	113
e_{il}'	Koeffizienten für die Kathode unter Berücksichtigung der Temperaturunterschiede	45
g	Hilfsfaktor	81
h_{kv}	"	54
i	Summationsindex	
j_v	Hilfsfaktor	79
k	Summationsindex	
ℓ	Länge der Elektroden	20
m_i	Anzahl der Gitterstreben	34
n	Anzahl der Elektroden	19
p, q	allgemeine Flächenkoordinaten	8
r_i	Radius des Gitterzylinders mit dem Index i	34
r_{ik}	Koeffizienten für die reflektierte Strahlung	7
s, s^*	Hilfsabstand	41,43
t	Parameter	60
u_{iv}	Unterdeterminanten	53
v_i	Verhältnis $\frac{O_i}{O_i(z)}$	34
w_i	pro Volumen- und Zeiteinheit erzeugte Wärmemenge	48
x,y,z	rechtwinklige Koordinaten	8
A_i	zugestrahlte Energie	2
C, C_1, C_2	Konstanten	
E_i	gesamte ausgestrahlte Energie	1

		eingeführt auf Seite:
$E_i^{(r)}$	gesamte reflektierte Energie	7
$E_i^{(ri)}$	an der Innenseite reflektierte Energie	25
$E_i^{(ra)}$	" " aussenseite " "	25
F_1, F_2	Hilfsfunktion	71
$G(T^{(\ell)}, T_a)$	Wärmeableitungsfunktion	59
H_i	gesamte dem Gitter zugeführte Energie	50
N	Nennerdeterminante	52
O_i	einseitige Oberfläche der i-ten Elektrode	9
$O^{(a)}$	Oberfläche der Abstrahlbleche (Kühlflügel) ...	81
$O_i^{(r)}$	Oberfläche des realen Gitters	49
$O_i^{(z)}$	einseitige Oberfläche des Gitterzylinders mit dem Index i	34
$P(t)$	Hilfsfunktion	64
Q_i	durch Wärme abgeleitete Energie	2
R_i	spezifische Reflexionsintensität	14
S_i	" Strahlungsintensität	8
T_a	Aussentemperatur	59
T_i	absolute Temperatur der i-ten Elektrode	1
$T^{(\ell)}$	Gitterendtemperatur	58
$T^{(\ell)*}$	Hilfstemperatur	65
$T^{(max)}$	Gittermaximaltemperatur	58
$U_{ik}(p,q)$	Wärmeübertragungsfunktion	10
V_i	Hilfsenergie = $W_i - Q_i$	17
W_i	von aussen zugeführte Energie	1
Z_i	Zählerdeterminanten	53
α	Integrationsvariable	11
α_{ik}	Durchlassfaktor	31
β	Integrationsvariable	11
β_{ik}	Auffangfaktor	31
δ_{ik}	Endlichkeitsfaktor	40
δ	Durchmesser des Gitterwickeldrahtes	34
δ'	Durchmesser der Streben	34
ε_i	Hilfsfaktor	28
ζ	Gittersteigung	34

		eingeführt auf Seite:
η	Faktor im Ausstrahlungsgesetz	49
ϑ	Polarkoordinate	8
λ	Wärmeleitfähigkeit.....	1
μ, ν	Summationsindices	
ξ	Exponent im Ausstrahlungsgesetz	49
ρ	Reflexionsvermögen	1
σ	Konstante im Stefan-Boltzmannschen Gesetz	87
φ	Polarkoordinate	8
χ_i	Hilfsfunktion	18
ψ	Zylinderkoordinate .....,	41
ω	Raumwinkel	8
Γ_{ik}	Restintegral für die Koeffizienten e_{ik}	11
$\Gamma_{ik}^{(r)}$	" " " " r_{ik}	16
θ	Hilfsfunktion	62
Σ	Störungsglied	102
Φ_i	Hilfsfunktion	18
Ω	"	65

Zusammenfassung

Der erste Teil der vorliegenden Arbeit behandelt die Aufgabe, die Körpertemperaturen eines im Gleichgewichtszustand befindlichen Systems von n Körpern, zwischen denen Energie durch Strahlung ausgetauscht wird, zu berechnen. Die Lösung dieser Aufgabe stösst, da der Strahlungsaustausch zwischen den Körpern auf sehr vielen verschiedenen unübersichtlichen Wegen erfolgt, auf grosse Schwierigkeiten; eine allgemeine Lösung konnte infolgedessen bisher noch nicht angegeben werden. Der erste Teil der vorliegenden Arbeit stellt den Versuch dar, zu einer solchen allgemeinen Lösung zu gelangen. Es wird gezeigt, dass diese allgemeine Lösung erhalten wird unter der Voraussetzung, dass die Körper gewisse Grundbedingungen erfüllen.

Das im ersten Teil entwickelte Verfahren wird im zweiten Teil der Arbeit dazu benutzt, um die Temperaturen der Elektroden und insbesondere die für die thermische Gitteremission bedeutsame Temperatur des Steuergitters einer Elektronenröhre zu berechnen. Dabei muss, da die Grundbedingungen des allgemeinen Verfahrens für eine Elektronenröhre keineswegs vollkommen erfüllt sind, das Verfahren entsprechend erweitert werden. Die hierzu erforderlichen Annahmen und Vernachlässigungen werden im dritten Teil der Arbeit experimentell nachgeprüft.

Bei der im ersten Teil der Arbeit behandelten Lösung der allgemeinen Aufgabe wird für jeden der n Körper der Zusammenhang zwischen der Temperatur T und der ausgestrahlten Energiemenge E sowie das Wärmeleitvermögen und das Absorptionsvermögen a für das Maximum der auftreffenden Strahlung als bekannt vorausgesetzt. Die Ermittlung der Temperaturen wird in bekannter Weise mit Hilfe des Gesamtstrahlungsgesetzes auf die Bestimmung der von den Körpern ausgestrahlten Energien zurückgeführt. Die Hauptaufgabe ist die Bestimmung dieser Energien. Zu diesem Zwecke wird für jeden der Körper die Energiebilanz aufgestellt, welche - bei zunächst vernachlässigter Wärmeleitung - besagt, dass im Gleichgewichtszustand die von irgendeinem der Körper ausgestrahlte Energie E_i gleich der von diesem Körper aufgenommenen Energie ist. Da die aufgenommene Energie gleich ist der Summe aus der von aussen zugeführten Energie W_i und aus dem absorbierten Bruchteil der dem betreffenden Körper von den Körpern des Systems zugestrahlten Energie A_i $(E_1 \ldots\ldots E_n)$, so wird auf diese Weise ein System von n Gleichungen

$$E_i = W_i + a_i A_i (E_1 \ldots\ldots E_n) \qquad i = 1 \ldots\ldots n$$

erhalten.

Es wird darauf hingewiesen, dass die zugestrahlte Energie A_i, die zur Auflösung dieses Gleichungssystems in Abhängigkeit von den ausgestrahlten Energien $E_1 \ldots\ldots E_n$ ermittelt werden muss, aus zwei Teilen besteht, nämlich einerseits aus der Strahlung, welche den betrachteten Körper unmittelbar - ohne Reflexionen - trifft, und andererseits aus der Strahlung, die vor dem Auftreffen auf den betrachteten Körper mehr oder weniger oft an Körpern des Systems reflektiert worden ist.

Es werden zunächst Versuche früherer Autoren besprochen, die gemacht worden sind, um die Funktion A_i $(E_1 \ldots\ldots E_n)$ zu ermitteln. Bei diesem Versuchen wird die auf den betrachteten Körper auftreffende Strahlung A_i nach ihrem Entstehungsort eingeteilt, und es werden weiterhin im einzelnen die Wege verfolgt, welche die Strahlung von ihrem Entstehungsort aus innerhalb des Systems zurücklegt. Es wird gezeigt, dass hierbei wegen der Unübersichtlichkeit dieser Wege eine Ermittlung der Funktion A_i bei einer grösseren Zahl von Körpern auf unüberwindliche Schwierigkeiten stösst, so dass eine Lösung der Aufgabe bisher nur für einfache, aus zwei Körpern bestehende Systeme angegeben werden konnte. Auch die in einer Arbeit von Seibert durchgeführte Untersuchung eines aus mehr als zwei Körpern bestehenden Systems kann, da bei dieser die reflektierte Strahlung vernachlässigt wird, nicht als Lösung der Aufgabe angesehen werden.

Es wird weiterhin das neue entwickelte Verfahren behandelt. Bei diesem wird in der Weise vorgegangen, dass die auf einen beliebigen Körper auftreffende Strahlung A ohne Rücksicht auf ihren Entstehungsort eingeteilt wird in die Strahlung E, welche den Körper unmittelbar, d.h. ohne Reflexionen, erreicht, und in die Strahlung $E^{(r)}$, die ihn nach einer mehr oder weniger grossen Anzahl von Reflexionen an irgendwelchen Körpern des Systems trifft. Die nach Reflexionen auftreffende Strahlung wird im Gegensatz zu den bisher vorgenommenen Lösungsversuchen lediglich in ihrer Gesamtheit betrachtet, ohne dass der von ihr im System zurückgelegte Weg berücksichtigt wird; sie wird denjenigen Körpern zugeordnet, an denen sie vor ihrem Auftreffen auf den betrachteten Körper zuletzt reflektiert worden ist. Diese Zuordnung wird dadurch ermöglicht, dass die gesamte an einem Körper reflektierte Strahlung als Hilfsunbekannte $E_k^{(r)}$ eingeführt wird. Auf diese Weise kann dann die dem betrachteten Körper zugestrahlte Energie A_i in Abhängigkeit von den ausgestrahlten Energien E_k und den reflektierten Energien $E_k^{(r)}$ aller n Körper des Systems dargestellt werden.

Durch Einführung der so gefundenen Abhängigkeit in die Energiebilanz wird anstatt des ursprünglichen Gleichungssystems ein System von 2 n linearen Gleichungen

$$E_i = W_i + a_i \sum_{k=1}^{n} \left(e_{ik} E_k + r_{ik} E_k^{(r)} \right)$$

$$E_i^{(r)} = (1 - a_i) \sum_{k=1}^{n} \left(e_{ik} E_k + r_{ik} E_k^{(r)} \right), \qquad i = 1 \ldots\ldots n$$

erhalten, aus dem die gesuchten ausgestrahlten Energien E_i zu bestimmen sind. In diesem "Grundgleichungssystem" sind die e_{ik} bzw. r_{ik} Koeffizienten, die angeben, welcher Bruchteil der von irgendeinem k-ten Körper ausgesandten bzw. an ihm reflektierten Strahlung E_k bzw. $E_k^{(r)}$ den i-ten Körper trifft.

Die zur Auflösung des Grundgleichungssystems erforderliche Berechnung der Koeffizienten e_{ik} und r_{ik} wird vorgenommen. Dabei ergibt sich, dass die zuerst genannten Koeffizienten, die sich auf die direkt übertragene Strahlung beziehen, aus den geometrischen Verhältnissen des Systems ermittelt werden können, wenn die Temperatur auf der Oberfläche eines jeden der n Körper sich nur wenig ändert. Dagegen können die auf die reflektierte Strahlung bezüglichen Koeffizienten r_{ik} nicht unmittelbar bestimmt werden.Es wird jedoch gezeigt - und dieses ist ein sehr wichtiger Schritt zur allgemeinen Lösung der Aufgabe - dass zwischen den r_{ik} und den e_{ik} eine Beziehung besteht und dass insbesondere der Koeffizient r_{ik} gleich dem zugehörigen Koeffizienten e_{ik} ist, wenn die Normalkomkomponente des Temperaturgradienten längs der Oberfläche eines jeden der Körper nahezu konstant ist.

Schliesslich wird angegeben, wie der bisher vernachlässigte Einfluss der Wärmeleitung im Grundgleichungssystem zu berücksichtigen ist, und es wird gezeigt, wie mittels des so abgeänderten Grundgleichungssystems die Körpertemperaturen für jedes beliebige System von n Körpern ermittelt werden können, falls die beiden für die Berechenbarkeit der Koeffizienten bestehenden "Grundbedingungen"- nahezu konstante Temperatur und nahezu konstante Normalkomponente des Temperaturgradienten längs der Körperoberfläche - erfüllt sind.

Im zweiten Teil der Arbeit wird das im ersten Teil entwickelte allgemeine Verfahren auf eine Elektronenröhre mit beliebig vielen zylinderförmigen Elektroden übertragen, damit die Temperatur dieser Elektroden und insbesondere die für die thermische Gitteremission bedeutsame Temperatur des Steuergitters berechnet werden kann. Eine solche Elektronenröhre stellt insofern einen Sonderfall der allgemeinen Körperanordnung dar, als bei ihr nur einem der Körper, nämlich der Kathode, eine wesentliche Energiemenge von aussen zugeführt wird. Diese Sonderstellung der Kathode wird auch dadurch gekennzeichnet, dass es in allen praktisch vorkommenden Fragestellungen ausreicht, irgendwelche Veränderungen, z.B. auch die der Steuergittertemperatur, in Abhängigkeit von der Temperatur der Kathode zu untersuchen. Dementsprechend wird bei der Anwendung des Verfahrens auf die Elektronenröhre die Kathodentemperatur und ihre Verteilung längs der Kathodenoberfläche als bekannt vorausgesetzt. Durch diese Einschränkung wird erreicht, dass die von der Kathode abgeleitete Wärmemenge aus den Rechnungen herausfällt und dass die Bedingung nahezu konstanter Temperatur für die Kathode nicht erfüllt zu sein braucht.

Bei der zunächst durchgeführten Untersuchung nach der Erfüllung der beiden Grundbedingungen des Verfahrens wird festegestellt, dass die Bedingung nahezu konstanter Temperatur für alle Elektroden ausser der Kathode erfüllt ist, wenn von der Wärmeableitung von den Gittern zunächst abgesehen wird. Die zweite Bedingung eines nahezu konstanten Temperaturgradienten ist, wie gezeigt wird, für die Kathode ebenfalls erfüllt. Bei den übrigen Elektroden wird ihre Erfüllung dadurch bewirkt, dass die Innen- und Aussenseiten dieser Elektroden getrennt betrachtet und dass die wirklich vorhandenen Gitter durch "idealisierte Gitter" ersetzt werden. Diese idealisierten Gitter bestehen aus kreisförmigen Ringen verschwin-

dender Dicke, deren Durchmesser gleich dem des realen Gitters, deren Höhe gleich dem Durchmesser des Gitterwickeldrahtes, deren Anzahl gleich der Windungszahl und deren Abstand gleich dem Windungsabstand des realen Gitters ist.

Für eine n-Elektrodenröhre mit derartig idealisierten Gittern wird dann das aus 3 n - 2 linearen Gleichungen bestehende Grundgleichungssystem aufgestellt. Weiterhin werden die darin vorkommenden Koeffizienten e_{ik} berechnet. Es wird gezeigt, dass diese Berechnung sich verhältnismässig einfach durchführen lässt, weil die Anzahl der Gitterwindungen gross ist und weil ferner der Durchmesser des Gitterwickeldrahtes klein ist gegenüber der Gittersteigung und dem gegenseitigen Abstand der Elektroden. Infolge dieser "feinen Gitterunterteilung" wird nämlich beim Durchgang der Strahlung durch ein Gitter die Strahlungsdichte lediglich in einem konstanten Verhältnis geschwächt, während die Verteilung der Dichte ungeändert bleibt. Infolgedessen können die Koeffizienten beim Strahlungsübergang zwischen unendlich langen Elektroden in zwei Faktoren zerlegt werden. Von diesen gibt der eine, der "Durchlassfaktor", an, welcher Bruchteil der von der strahlenden Elektrode ausgesandten Strahlung von den zwischen strahlender und bestrahlter Elektrode befindlichen abschirmenden Gittern hindurchgelassen wird, während der zweite, der "Auffangfaktor", angibt, welcher Bruchteil dieser durchgelassenen Energie von der bestrahlten Elektrode aufgefangen wird. Die Berücksichtigung der endlichen Länge der Elektroden erfolgt durch Multiplikation der beiden genannten Faktoren mit einem dritten Faktor - dem "Endlichkeitsfaktor" -, der sich mit Hilfe von Integrationen aus den geometrischen Verhältnissen ergibt.

Es wird weiterhin das Verfahren erweitert auf den Fall, dass den Gittern eine merkliche Energiemenge durch Wärmeleitung nach aussen entzogen wird. Die vorher für das nichtwärmeleitende Gitter durchgeführten Rechnungen können auf diesen Fall übertragen werden, da der Einfluss der von den Gittern abgeleiteten Wärmemengen auf die einem Gitter zugestrahlte Energie gering ist und als eine Korrektur angesehen werden kann. Diese Tatsache ist darin begründet, dass die von jedem einzelnen Gitter ausgestrahlte Energie klein gegenüber der von der Kathode ausgestrahlten Energie ist, so dass eine durch die Wärmeleitung bewirkte Verringerung der vom Gitter ausgestrahlten Energie die Strahlungsverhältnisse im gesamten Elektrodensystem und daher auch die zugestrahlte Energie nur verhältnismässig wenig beeinflusst. Man erhält daher bei einem wärmeleitenden Gitter durch die Auflösung des Grundgleichungssystems einen Näherungswert der zugestrahlten Energie, der, wie gezeigt wird, bereits eine recht gute Annäherung an den genauen Wert darstellt. Dieser Näherungswert kann mit Hilfe der daraus berechenbaren angenähert gültigen Gittertemperatur später noch beliebig gut verbessert werden.

Es wird ferner darauf hingewiesen, dass zur Behandlung der Wärmeleitung im Gitter wieder das reale Gitter an Stelle des idealisierten eingeführt und vorausgesetzt werden muss, dass die auftreffenden Strahlungsenergien in beiden Fällen die gleichen sind. Unter der weiteren Voraussetzung, dass die Ableitung der Wärme ausschliesslich durch die Streben erfolgt und dass die Temperatur jeder Gitterwindung die gleiche ist wie die der Strebe an der Schweissstelle mit der betreffenden Windung, wird die für das wärmeleiten-

de Gitter geltende Differentialgleichung aufgestellt. Diese Differentialgleichung wird unter der bei der Untersuchung von Drähten üblichen Annahme, dass Temperaturverschiedenheiten innerhalb eines Querschnittes vernachlässigt werden können, linear und verknüpft den zweiten Differentalquotienten der Temepraturverteilungsfunktion längs des Gitters an irgendeiner Stelle mit der an dieser Stelle in der Zeiteinheit erzeugten Wärmemenge und mit dem Wärmeleitvermögen der Streben. Es ergibt sich, dass die erzeugte Wärmemenge als Differenz aus der dem Gitter pro Volumen und Zeiteinheit zugeführten und aus der von ihm wieder ausgestrahlten Energie berechnet werden kann, wenn vorausgesetzt wird, dass an Stelle der in Wirklichkeit von der Koordinate in der Längsrichtung des Gitters abhängigen zugeführten Energie ein für alle Gitterpunkte gleicher Mittelwert dieser Energie eingeführt werden darf. Dieser Mittelwert wird erhalten, indem die dem Gitter insgesamt zugeführte Energie, die sich aus dem Grundgleichungssystem ergibt, durch das Volumen der Streben dividiert wird.

Die Wärmeleitungs-Differentialgleichung wird zunächst für den Fall, dass die Wärme lediglich an einem Ende des Gitters abgeleitet wird, gelöst. Zu diesem Zwecke werden die in dem betrachteten Falle gültigen Randbedingungen der Differentialgleichung aufgestellt. Sie ergeben sich auf Grund der Überlegung, dass die höchste Temperatur am freien, nicht wärmeableitenden Gitterende liegt, und dass ferner die gesamte vom Gitter abgeleitete Energiemenge durch den Strebenquerschnitt am wärmeableitenden Strebenende fliessen muss. Die Lösung der Wärmeleitungsgleichung wird dadurch ermöglicht, dass die erste der beiden Randbedingungen zunächst nicht berücksichtigt und die Temperatur am nicht ableitenden Gitterende als veränderlich angesehen wird. Dadurch ergibt sich eine Schar von Temperaturverteilungskurven. Aus dieser Schar wird diejenige herausgesucht, welche auch der ersten bisher unberücksichtigt gebliebenen Randbedingung genügt. Zur Ermittlung dieser physikalisch allein möglichen Temperaturverteilung wird die Tatsache benutzt, dass sie einen Gleichgewichtszustand darstellt, in dem die im Gitter insgesamt erzeugte Wärmemenge gleich der am Gitterende insgesamt abgeleiteten Energie sein muss. Schliesslich wird noch kurz darauf eingegangen, inwieweit die angegebenen Gleichungen geändert werden, wenn die Wärme nicht nur an einem Ende des Gitters sondern an beiden Enden abgeleitet wird.

Am Schluss des zweiten Abschnittes wird beschrieben, wie die auf diese Weise erhaltenen ersten Näherungswerte für die Gittertemperaturen noch verbessert werden können. Ferner werden die aus dem allgemeinen Fall von n Elektroden sich ergebenden Formeln für zwei und drei Elektroden angegeben,und es wird gezeigt, wie die bei mehr als drei Elektroden notwendigen zahlenmässige Rechnungen sich vereinfachen lassen.

Der dritte Teil der Arbeit ist der experimentellen Nachprüfung der Voraussetzungen gewidmet, die angenommen werden mussten, damit dass im ersten Abschnitt geschilderte allgemeine Verfahren auf die n-Elektrodenröhre übertragen werden konnte. Diese Voraussetzungen sowie die Gründe, die zu ihrer Einführung Anlass gaben, werden zunächst zusammengestellt. Es sind das die folgenden Voraussetzungen:

1. Die in der Röhre vorhandenen Gitter sind fein unterteilt, so dass die Einschaltung eines Gitters in den Strahlengang nur eine Intensitätsschwächung, dagegen keine Änderung in der Verteilung der Strahlungsdichte hervorruft.

2. Die Betrachtung des Wärmeleitungsvorganges im Gitter kann auf die Gitterstreben beschränkt werden, und es besitzt jede Windung die Temperatur der Streben an der Schweissstelle mit der betreffenden Windung.

3. Die bei wärmeleitenden Gittern auftretenden Temperaturunterschiede längs des Gitters und die damit zusammenhängende Nichterfüllung der beiden Grundbedingungen - nahezu konstante Temperatur und nahezu konstanter Normalgradient längs der Gitteroberfläche - bewirken nur eine praktisch zu vernachlässigende Störung der Strahlungsverhältnisse.

4. Es ist zulässig, die Abhängigkeit der zugeführten Energie von der Koordinate in der Längsrichtung des Gitters unberücksichtigt zu lassen und statt dessen einen für alle Gitterpunkte gleichen Mittelwert dieser Energie einzuführen.

5. Das reale Gitter besitzt die gleichen Strahlungseigenschaften und fängt insbesondere die gleiche Strahlungsmenge auf wie das entsprechende idealisierte Gitter.

Die Nachprüfung dieser Voraussetzungen erfolgt derart, dass die unter den einzelnen Voraussetzungen berechneten Temperaturen mit an geeigneten Röhren gemessenen verglichen werden; die untersuchten Röhren ähneln den in der Fabrikation hergestellten. Bei der Berechnung der Temperaturen ist, wie gezeigt wird, das Reflexionsvermögen für diejenige Wellenlänge zu benutzen, bei welcher die Kathode die grösste Energie ausstrahlt. Für die Ausstrahlungsgesetze von Nickel bzw. Molybdän, die für die Berechnung ebenfalls erforderlich sind, werden von Suydam bzw. Worthing experimentell gefundene Beziehungen angegeben. Da diese Ausstrahlungsgesetze ebenso wie die Werte für das Reflexionsvermögen bei den für die Versuche benutzten Werkstoffen nicht genau gültig sind, so verursachen sie Abweichungen zwischen Rechnung und Messung, die durch Versuche an Zweielektrodenröhren ermittelt werden. Diese Abweichungen betrugen bei den verwendeten Röhrentypen, bei denen als Kathodenschicht das gut grau strahlende Uranoxyd verwendet wurde, im Höchstfall 3%. Rund die Hälfte dieser Abweichung ist, wie gezeigt wird, bereits durch die reinen Messfehler bedingt.

Es wird dann zunächst die erste Voraussetzung mittels sichtbaren Lichtes nachgeprüft. Die Versuche, bei denen mit Hilfe einer photographischen Platte die Verteilung der von einem Gitter hindurchgelassenen Strahlung untersucht wird, ergeben, dass die Dichteverteilung der auf die Platte auffallenden Strahlung durch das Einschalten des Gitters in den Strahlengang nicht geändert wird, sobald die photographische Platte mindestens 1 mm vom Gitter entfernt ist. Infolgedessen ist bei technischen Röhren, bei denen der Abstand zweier aufeinanderfolgender Gitter stets grösser als 1 mm ist, die Voraussetzung der feinen Gitterunterteilung sicher erfüllt.

Die unter alleiniger Benutzung dieser Voraussetzung für das idealisierte, nicht wärmeleitende Gitter berechneten Temperaturen werden mit denjenigen verglichen, die an einem dem idealisierten möglichst vollkommen nachgebildeten Gitter gemessen werden. Die gemessenen und berechneten Werte stimmen innerhalb der Abweichungen, die durch die nicht genau bekannten Strahlungsgesetze und Werte des Reflexionsvermögens bedingt sind, überein.

Die weiterhin vorgenommene Prüfung der zweiten Voraussetzung ergibt, dass die Temperatur der Streben sich von der der Windungen im Höchstfall um etwa 2% unterscheidet. Dieser Unterschied ist so gering, dass Streben und Windungstemperatur praktisch als gleich gross angesehen werden können. Infolgedessen kann auch die Betrachtung des Wärmeleitungsvorganges im Gitter auf die Streben beschränkt werden.

Bei der Prüfung der ebenfalls auf die Wärmeleitung im Gitter sich beziehenden Voraussetzungen (3) und (4) wird zunächst der Fehler, der durch die Einführung einer jeden von ihnen entsteht, rechnerisch abgeschätzt. Zu diesem Zweck wird für eine Vierelektrodenröhre der Einfluss der im wärmeleitenden Gitter auftreffenden Temperaturunterschiede auf die Strahlungsverhältnisse des Elektrodensystems zahlenmässig bestimmt. Wie die Rechnung ergibt, ist dieser Einfluss bei den untersuchten Röhrentypen so gering, dass die Gittertemperatur durch ihn nur um etwa 2 % geändert wird. Hieraus wird geschlossen, dass die Störung, welche durch die Temperaturunterschiede im wärmeleitenden Gitter hervorgerufen wird, im allgemeinen praktisch vernachlässigt werden kann.

Ferner wird zur Abschätzung des durch die vierte Voraussetzung entstehenden Fehlers die Abhängigkeit der zugeführten Energie von der Koordinate in der Längsrichtung des Gitters annäherungsweise ermittelt. Der unter Benutzung dieser Abhängigkeit mit Hilfe der Wärmeleitungsgleichung berechnete Wert der Gittertemperatur wird dann mit demjenigen Wert verglichen, den man erhält, wenn man statt der genannten Abhängigkeit den für alle Gitterpunkte gleichen Mittelwert der zugeführten Energie in die Wärmeleitungsgleichung einführt. Die dabei sich ergebende Abweichung betrug im ungünstigsten Fall des schlecht wärmeleitenden Gitters nur etwa 1½%.

Zur experimentellen Prüfung der beiden Voraussetzungen (3) und (4), die nur gemeinsam durchgeführt werden kann, werden Röhren benutzt, die ebenfalls ein dem idealisierten sehr ähnliches Gitter besitzen, bei denen aber im Gegensatz zu den vorher durchgeführten Versuchen die Anordnung so getroffen wird, dass eine erhebliche Wärmemenge vom Gitter abgeleitet wird. Die zwischen den gemessenen und berechneten Werten erhaltene Abweichung betrug im Höchstfall 4 %, sie war also nur um 1 % grösser als der Fehler, der durch die ungenaue Kenntnis der Strahlungseigenschaften hervorgerufen wird.

Schliesslich wird auch der durch die letzte Voraussetzung entstehende Fehler durch Messungen an Röhren mit normalen Gittern festgestellt. Die an Drei- und Vierelektrodenröhren durchgeführten Messungen ergaben Temperaturen, die im Höchstfall ebenfalls nur um 4 % von den berechneten Werten abweichen, wenn als Kathodenwerkstoff ebenso wie bei den vorhergehenden Versuchen Uranoxyd verwendet wird, dessen Strahlungseigenschaften verhältnismässig gut bekannt sind.

Aus den angeführten Versuchen wird geschlossen, dass die Temperatur der Elektroden und insbesondere die des Steuergitters gebräuchlicher Röhren mit beliebigem zylindrischem Aufbau mit einer für die Praxis ausreichenden Genauigkeit berechnet werden kann, sofern die Strahlungsgesetze der Kathode bekannt sind.

Die angegebenen Ergebnisse und die zu ihrer Erlangung notwendigen Vernachlässigungen sind nachgeprüft worden für verschiedene Röhren, die denen der Fabrikation ähnelten. Es muss daher die Möglichkeit offen gelassen werden, dass bei Röhren, deren Abmessungen wesentlich andere sind als die untersuchten, Abweichungen auftreten, die grösser sind als die an normalen Röhren gefundenen Unterschiede. Immerhin wird auch in einem solchen Fall die Anwendung des abgeleiteten Verfahrens Aufschluss über die Abhängigkeit der Gittertemperatur von den einzelnen möglichen Veränderlichen geben.

Mit dieser Untersuchung wird ein Weg gezeigt, der es gestattet, Fragen der Röhrentechnik weitgehend systematisch zu behandeln, die mit der Temperatur der Elektroden zusammenhängen und deren experimentelle Beantwortung in vielen Fällen ausserordentlich umständlich wäre.

Die vorliegende Arbeit wurde im Versuchslaboratorium der Osram G.m.b.H. Werk A durchgeführt. Für die Genehmigung zu ihrer Ausführung möchte ich Herrn Direktor Dr. Mey auch an dieser Stelle meinen herzlichsten Dank aussprechen.

Ich fühle mich ferner Herrn Direktor Dr. Jacoby für seine wertvolle Unterstützung bei der Fertigstellung der Arbeit zu grossem Dank verpflichtet. Ganz besonders danke ich auch Herrn Dr. Heinze, der die Anregung zu dieser Arbeit gab und der mich bei ihrer Abfassung in mannigfacher Weise beraten hat.

Lebenslauf

Ich wurde am 14. August 1908 als Sohn des Lehrers Wilhelm Wagener in Hamburg geboren. Nach einem Jahr Privatunterricht besuchte ich von Michaelis 1915 bis Michaelis 1917 die Vorschule der Realschule vor dem Lübeckertor in Hamburg, von Michaelis 1917 bis Juli 1919 des Realgymnasium des Johanneums in Hamburg, von August 1919 bis Ostern 1920 die Körnerrealschule in Berlin und von Ostern 1920 ab die Städtische Oberrealschule in Celle. An dieser legte ich Ostern 1927 die Reifeprüfung ab. Anschliessend begann ich mit dem Studium der Physik an der Friedrich-Wilhelms Universität zu Berlin, an der ich bis Dezember 1934 immatrikuliert war. Während dieser Zeit besuchte ich Vorlesungen und Praktika bei den Professoren Bieberbach, Dessoir, Feigl, Guthnick, Hammerstein, Hettner, Hopf, Köhler, von Laue, von Mises, Nernst, Planck, Hilda Pollaczek, Pringsheim, Schlenk, Erhard Schmidt, F.J. Schmidt, Schrödinger, Schur, Carl Stumpf und Wehnelt.

Während meines Studiums war ich - anfangs mit Unterbrechungen, von Januar 1930 ab ständig - als Werkstudent im Versuchslaboratorium der Osram G.m.b.H., Kommanditgesellschaft, beschäftigt, in dem ich auch im Augenblick noch tätig bin.

Herstellung: VDI-Verlag G.m.b.H., Berlin NW 7